~~E92~~

OS 85^{9} n.v.

~~479.~~

A 273

2. 24

Auflöſungen

der

in Meier Hirſch, Sammlung von Beiſpielen etc.

enthaltenen

Gleichungen und Aufgaben.

Zum

Selbſtunterricht beſtimmt

von

S. Sachs,

Königl. Regierungs-Bau-Inſpektor.

STRAUBING

Neunte durchgeſehene Auflage.

Berlin.
Verlag von Duncker und Humblot.
1859.

131547 33x

g.

Staatl. Bibliothek
Passau

Vorwort*)

zur ſechſten Auflage.

Bei meinem vorgerückten Alter hatte ich nicht mehr gehofft, eine neue Auflage von gegenwärtigem Buche zu erleben, nachdem erſt vor fünf Jahren die fünfte Auflage erſchienen war. Es hat mich daher aufs Freudigſte überraſcht, als die Verlags-Handlung mich benachrichtigte, daß ſämmtliche Exemplare bereits vergriffen ſeien, und daher das Werk aufs Neue aufgelegt werden müſſe. Ich fühle mich wegen dieſer Theilnahme und Nachſicht gegen das Publikum dankbarlichſt verpflichtet, aber auch gegen die Verlags-Handlung kann ich nicht umhin, für die typographiſche Schönheit, womit ſie auch diesmal wieder das Werk auszuſtatten und eine wahre Pracht-Ausgabe zu veranſtalten bemüht war, meinen aufrichtigſten Dank auszuſprechen.

Berlin, den 1. September 1844.

Der Verfaſſer.

---

*) Zur ſiebenten und achten Auflage hat der Herr Verfaſſer kein Vorwort gegeben. Seitdem iſt derſelbe zu unſerm Bedauern am 14. Mai 1855 vom Leben abgerufen. So wurde denn einem, mit dem Werke ganz vertrauten Sachverſtändigen, die Reviſion übertragen, welcher ſich derſelben mit Gewiſſenhaftigkeit unterzogen hat.

Berlin, am 1. Februar 1859.

Die Verlagshandlung.

Vorrede

zur fünften Auflage.

Obgleich dieſes Werk einen Nachdruck im Ausland hat erfahren müſſen, und die rechtmäßigen Beſitzer deſſelben auch noch dadurch Eingriffe in ihr Eigenthum zu erdulden hatten, daß es ein hieſiger hochgeſtellter Gelehrter nicht verſchmähet hat, dieſelben Auflöſungen, in einem etwas veränderten Gewande, unter ſeinem Namen herauszugeben, ſo war doch die ſehr ſtarke vierte Auflage ſchon jetzt dergeſtalt vergriffen, daß ſeit einiger Zeit auch nicht ein einziges Exemplar mehr vorräthig iſt. Die Verlags-Handlung iſt daher zur Herausgabe dieſer gegenwärtigen fünften Auflage geſchritten, und hat dieſelbe mit einer ſolchen typographiſchen Schönheit ausgeſtattet, wie dies bei einer ſtreng wiſſenſchaftlichen Schrift, die überdies bereits ſeit vielen Jahren ihr Publikum gefunden hat, gewiß zu den Seltenheiten gehört, wofür derſelben ſicherlich die vollſte Anerkennung wird zu Theil werden.

Berlin, den 21. December 1838.

Der Verfaſſer.

Von den Gleichungen.

(Zu Meier Hirſch, Sammlung von Beiſpielen, XIIItes und XIVtes Kapitel, von S. 123 bis 161.)

I.

Auflöſungen der Gleichungen vom erſten Grade mit einer unbekannten Größe.

---

1. Gleichung.

$$ax \pm b = c.$$

Auflöſung.

1) $ax = c - b$,

folgl. $x = \dfrac{c - b}{a}$.

2) $ax = c + b$,

folgl. $x = \dfrac{c + b}{a}$.

2. Gleichung.

$$3a + x - 5b + 2 = 7b - a + c + 6.$$

Auflöſung.

$$x = 7b + 5b - a - 3a + c + 6 - 2$$
$$= 12b - 4a + c + 4.$$

3. Gleichung.

$$7 - 9a - 5x + 3cd + x = \tfrac{7}{4} - 3a - 2cd - 2x.$$

A

Auflöſung.

$$-5x + x + 2x = \tfrac{7}{4} - 7 - 3a + 9a - 2cd - 3cd$$

oder $-2x = -\tfrac{21}{4} + 6a - 5cd.$

Verwandelt man die Zeichen,

ſo iſt $2x = \tfrac{21}{4} - 6a + 5cd,$

folgl. $x = \tfrac{21}{8} - 3a + \tfrac{5}{2}cd.$

4. Gleichung.

$$8x - 5 = 13 - 7x.$$

Auflöſung.

$$8x + 7x = 13 + 5$$

oder $15x = 18,$

folgl. $x = \tfrac{18}{15} = \tfrac{6}{5} = 1\tfrac{1}{5}.$

5. Gleichung.

$$13\tfrac{3}{4} - \frac{x}{2} = 2x - 8\tfrac{3}{4}.$$

Auflöſung.

$$2x + \frac{x}{2} = 13\tfrac{3}{4} + 8\tfrac{3}{4}$$

oder $\dfrac{5x}{2} = \tfrac{45}{2},$

$$5x = 45,$$

folgl. $x = 9.$

6. Gleichung.

$$2x + 7 + \tfrac{3}{2}x = 6x - 23.$$

Auflöſung.

$$2x + \tfrac{3}{2}x - 6x = -23 - 7$$

oder $-\dfrac{5x}{2} = -30,$

das iſt $\frac{5x}{2} = 30$

oder $5x = 60,$

folgl. $x = 12.$

7. Gleichung.

$$12\tfrac{1}{4} + 3x - 6 - \frac{7x}{3} = \frac{3x}{4} - 5\tfrac{3}{8}.$$

Auflöſung.

$$3x - \frac{7x}{3} - \frac{3x}{4} = -5\tfrac{3}{8} + 6 - 12\tfrac{1}{4}$$

oder $-\frac{x}{12} = -11\tfrac{5}{8},$

folgl. $x = 139\tfrac{1}{2}.$

8. Gleichung.

$$-6\tfrac{1}{3}x + 158\tfrac{1}{2} - 10x = -\frac{37x}{6} + 19 + \tfrac{3}{8}x.$$

Auflöſung.

$$-6\tfrac{1}{3}x - 10x + \frac{37x}{6} - \tfrac{3}{8}x = 19 - 158\tfrac{1}{2}$$

oder $-\frac{253}{24}x = -139\tfrac{1}{2},$

folgl. $x = \frac{139\frac{1}{2} \cdot 24}{253} = 13\tfrac{59}{253}.$

9. Gleichung.

$$8\tfrac{3}{4} + \frac{3x}{7} - \tfrac{5}{6} + 2x - \frac{12x}{5} + 13 + \frac{x}{4} = 0.$$

Auflöſung.

$$\frac{3x}{7} + 2x - \frac{12x}{5} + \frac{x}{4} = \tfrac{5}{6} - 8\tfrac{3}{4} - 13$$

oder $\frac{39x}{140} = -\frac{251}{12}$,

folgl. $x = -\frac{140\cdot 251}{39\cdot 12} = -75\frac{10}{117}$.

10. Gleichung.

$$\frac{3x}{5} - \frac{7x}{10} + \frac{3x}{4} - \frac{7x}{8} = -15.$$

Auflöſung.

$$-\frac{9x}{40} = -15,$$

folgl. $x = 66\frac{2}{3}$.

11. Gleichung.

$$3\tfrac{2}{3} - x - \frac{9x}{2} + 8 = -17 - \frac{3x}{5} + \tfrac{3}{2}x.$$

Auflöſung.

$$-x - \frac{9x}{2} + \frac{3x}{5} - \frac{3x}{2} = -17 - 3\tfrac{2}{3} - 8$$

oder $-\frac{32x}{5} = -\frac{86}{3}$,

folgl. $x = 4\frac{23}{48}$.

12. Gleichung.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 7x - 712 + \frac{x}{5}.$$

Auflöſung.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - 7x - \frac{x}{5} = -712$$

oder $-\frac{367x}{60} = -712$,

folgl. $x = 116\frac{148}{367}$.

13. Gleichung.

$$11\tfrac{1}{2}x = \tfrac{11}{8}x + 66\tfrac{3}{8} - 5x - 9\tfrac{1}{4}.$$

Auflöſung.

$$11\tfrac{1}{2}x - \tfrac{11}{8}x + 5x = 66\tfrac{3}{8} - 9\tfrac{1}{4}$$

oder $\tfrac{121}{8}x = \tfrac{457}{8}$,

folgl. $x = 3\tfrac{94}{121}$.

14. Gleichung.

$$-\tfrac{16}{7}x = -\tfrac{1}{2}x + 412\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{5}x - 316\tfrac{1}{2}.$$

Auflöſung.

$$-\tfrac{16}{7}x + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{5}x = 412\tfrac{1}{2} - 316\tfrac{1}{2}$$

oder $-\dfrac{83x}{70} = 96$,

folgl. $x = -80\tfrac{80}{83}$.

15. Gleichung.

$$32\tfrac{1}{10}x + 176\tfrac{3}{4} - x = 19\tfrac{1}{3}x + 7345 - \frac{2x}{3}.$$

Auflöſung.

$$32\tfrac{1}{10}x - x - 19\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}x = 7345 - 176\tfrac{3}{4}$$

oder $\dfrac{373x}{30} = \dfrac{28673}{4}$,

folgl. $x = 576\tfrac{399}{746}$.

16. Gleichung.

$$3{,}25x - 5{,}007 - x = 0{,}2 - 0{,}34x.$$

Auflöſung.

$$3{,}25x - x + 0{,}34x = 0{,}2 + 5{,}007$$

oder $2{,}59x = 5{,}207$,

folgl. $x = 2{,}010424\cdots$

17. Gleichung.

$$13{,}2x - \frac{3x}{4} + 7{,}6953 = \frac{x}{5} + 7834{,}5.$$

Auflöſung.

$$13{,}2x - \frac{3x}{4} - \frac{x}{5} = 7834{,}5 - 7{,}6953$$

oder $12{,}25x = 7826{,}8047,$

folgl. $x = 638{,}92283\cdots$

18. Gleichung.

$$\frac{7{,}53x}{18} + 100 = \frac{2x}{5} + 3{,}86 - \frac{x}{6}.$$

Auflöſung.

$$\frac{7{,}53x}{18} - \frac{2x}{5} + \frac{x}{6} = 3{,}86 - 100$$

oder $\frac{37x}{200} = -96{,}14,$

folgl. $x = -519{,}67567.$

19. Gleichung.

$$ax + c = d + bx.$$

Auflöſung.

$$ax - bx = d - c$$

oder $x\,(a - b) = d - c,$

folgl. $x = \frac{d - c}{a - b}.$

20. Gleichung.

$$\frac{f^2x}{cg} - \frac{a^2}{f} + cx = \frac{hx}{g} - c + (a + c)\,x.$$

Auflöſung.

$$\frac{f^2x}{cg} + cx - \frac{hx}{g} - ax - cx = \frac{a^2}{f} - c$$

oder $$x\left(\frac{f^2}{cg} + c - \frac{h}{g} - a - c\right) = \frac{a^2}{f} - c,$$

$$x\left(\frac{f^3 - fhc - afcg}{fcg}\right) = \frac{a^2cg - c^2fg}{fcg},$$

$$x\,(f^2 - hc - acg)\,f = (a^2 - cf)\,cg,$$

$$x = \frac{(a^2 - cf)cg}{(f^2 - hc - acg)f}.$$

21. Gleichung.

$$x = a + \frac{bc}{d} + \frac{cfx}{de}.$$

Auflöſung.

$$x - \frac{cfx}{de} = a + \frac{bc}{d}$$

oder $$\frac{x\,(de - cf)}{de} = \frac{ade + bce}{de},$$

$$x\,(de - cf) = ade + bce,$$

folgl. $$x = \frac{ade + bce}{de - cf} = \frac{(ad + bc)\,e}{de - cf}.$$

22. Gleichung.

$$\frac{ex}{f} + \frac{cx}{d} + \frac{ax}{b} - g = h.$$

Auflöſung.

$$\frac{edbx + bcfx + afdx}{fdb} = \frac{gfdb + hfdb}{fdb}$$

oder $$x\,(edb + bcf + afd) = (h + g)\,fdb,$$

folgl. $$x = \frac{(h+g)\,fdb}{b\,(ed+cf)+afd}.$$

23. Gleichung.

$$\tfrac{5}{6}ab + \tfrac{4}{5}ac - \tfrac{2}{3}cx = \tfrac{3}{4}ac + 2ab - 6cx.$$

Auflöſung.

$$-\tfrac{2}{3}cx + 6cx = \tfrac{3}{4}ac - \tfrac{4}{5}ac + 2ab - \tfrac{5}{6}ab$$

oder $$\frac{16cx}{3} = -\frac{ac}{20} + \frac{7ab}{6},$$

$$16cx = \frac{21ab}{6} - \frac{3ac}{20},$$

$$x = \frac{21ab}{6 \cdot 16c} - \frac{3ac}{16 \cdot 20c} = \frac{7ab}{32c} - \frac{3ac}{320c}$$

$$= \frac{70ab - 3ac}{320c} = \frac{(70b - 3c)a}{320c}.$$

24. Gleichung.

$$\frac{x}{a} - 1 - \frac{dx}{c} + 3ab = 0.$$

Auflöſung.

$$\frac{x}{a} - \frac{dx}{c} = 1 - 3ab$$

oder $$cx - adx = ac - 3a^2bc,$$

$$x(c - ad) = ac(1 - 3ab),$$

folgl. $$x = \frac{ac(1 - 3ab)}{c - ad}.$$

25. Gleichung.

$$\frac{ace}{d} - \frac{(a+b)^2x}{a} - bx = ae - 3bx.$$

Auflöſung.

$$\frac{(a+b)^2x}{a}+bx-3bx=-ae+\frac{ace}{d}$$

oder $$\frac{a^2x+2abx+b^2x+abx-3abx}{a}=\frac{ace-ade}{d},$$

$$x\,(a^2+2ab+b^2+ab-3ab)=\frac{a^2ce-a^2de}{d},$$

$$x\,(a^2+b^2)=\frac{a^2e(c-d)}{d},$$

folgl. $$x=\frac{a^2e(c-d)}{(a^2+b^2)d}.$$

26. Gleichung.

$$\frac{a+3x}{4a}-\frac{7a-5x}{6b}+3-\frac{9x}{4}=\frac{x}{ab}+\frac{5x}{6b}.$$

Auflöſung.

$$\frac{a+3x}{4a}-\frac{7a-5x}{6b}-\frac{9x}{4}-\frac{x}{ab}d-\frac{5x}{6b}=-3$$

oder $$\frac{3x}{4a}+\frac{5x}{6b}-\frac{9x}{4}-\frac{x}{ab}-\frac{5x}{6b}=-3+\frac{7a}{6b}-\frac{1}{4},$$

$$x\,\left(\frac{3}{4a}-\frac{9}{4}-\frac{1}{ab}\right)=\frac{7a}{6b}-\frac{13}{4},$$

$$x\,\left(\frac{3b-9ab-4}{4ab}\right)=\frac{14a-39b}{12b},$$

folgl. $$x=\frac{(14a-39b)4ab}{12b(3b-9ab-4)}=\frac{56a^2b-156ab^2}{36b^2-108ab^2-48b}$$

$$=\frac{4b(14a^2-39ab)}{4b(9b-27ab-12)}=\frac{14a^2-39ab}{9b-27ab-12}.^{*)}$$

---

*) In den Aufgaben iſt dieſes Reſultat mit den entgegengeſetzten Zeichen angegeben, wodurch aber der Werth nicht verändert wird. Man ſehe die Anmerk. zur 34. Auflöſung.

27. Gleichung.

$$5a^3cx + ac^2x - 5abc^2 - 3a^3c^3$$
$$= 5a^2bcx + bc^2x - 3a^2c^3b - 5a^2c^2.$$

Auflöſung.

$$x\,(5a^3c + ac^2 - 5a^2bc - bc^2)$$
$$= 5abc^2 + 3a^3c^3 - 3a^2c^3b - 5a^2c^2$$
$$\text{oder } x\,[ac(5a^2+c) - bc(5a^2+c)]$$
$$= ac(3a^2c^2 - 5ac) - bc(3a^2c^2 - 5ac),$$
$$x\,[(ac - bc)\,(5a^2+c)] = (ac - bc)\,(3a^2c^2 - 5ac),$$
$$\text{folgl. } x = \frac{(ac-bc)\,(3a^2c^2-5ac)}{(ac-bc)\,(5a^2+c)} = \frac{3a^2c^2-5ac}{5a^2+c}.$$

28. Gleichung.

$$2a^2b^2c + ab^2x - 2ab^3c - abc^2d - 3a^3x$$
$$= (b^3 - 3a^2b)\,x - b^2c^2d.$$

Auflöſung.

$$x\,(ab^2 - 3a^3 - b^3 + 3a^2b)$$
$$= -2a^2b^2c + 2ab^3c + abc^2d - b^2c^2d$$
$$\text{oder } x\,[3a^2(b-a) - b^2(b-a)] = 2ab^2c(b-a) - bc^2d(b-a),$$
$$x\,[(3a^2 - b^2)\,(b-a)] = (2ab^2c - bc^2d)\,(b-a),$$
$$\text{folgl. } x = \frac{(2ab^2c-bc^2d)\,(b-a)}{(3a^2-b^2)\,(b-a)} = \frac{2ab^2c-bc^2d}{3a^2-b^2}.$$

29. Gleichung.

$$\frac{ab}{x} = bc + d + \frac{1}{x}.$$

Auflöſung.

$$\frac{ab-1}{x} = bc + d$$

oder $x\,(bc+d) = ab-1$,

folgl. $x = \frac{ab-1}{bc+d}$.

30. Gleichung.

$$\frac{3a+x}{x} - 5 = \frac{6}{x}.$$

Auflöſung.

$$\frac{3a+x-6}{x} = 5$$

oder $3a+x-6 = 5x$,

$4x = 3a-6$,

folgl. $x = \frac{3a-6}{4}$.

31. Gleichung.

$$\frac{a^2x}{b-c} + dc = bx - ac.$$

Auflöſung.

$$bx - \frac{a^2x}{b-c} = dc + ac$$

oder $\frac{bx\,(b-c) - a^2x}{b-c} = \frac{(dc+ac)\,(b-c)}{b-c}$,

$x\,[b(b-c)-a^2] = c\,(a+d)\,(b-c)$,

folgl. $x = \frac{c\,(a+d)\,(b-c)}{b\,(b-c)-a^2}$.

32. Gleichung.

$$c = a + \frac{m\,(a-x)}{3a+x}.$$

Auflöſung.

$$\frac{ma-mx}{3a+c} = c-a$$

oder $ma - mx = cx - ax + 3ac - 3a^2$,

$$cx - ax + mx = ma - 3ac + 3a^2,$$

$$x(c - a + m) = a(m - 3c + 3a),$$

folgl. $x = \frac{a(m - 3c + 3a)}{c - a + m}$.

33. Gleichung.

$$\frac{a(d^2 + x^2)}{dx} = ac + \frac{ax}{d}.$$

Auflöſung.

$$\frac{ax^2 + ad^2}{dx} - \frac{ax}{d} = ac$$

oder $\frac{ax^2 + ad^2 - ax^2}{dx} = \frac{acdx}{dx}$,

$$ad^2 = acdx,$$

folgl. $x = \frac{ad^2}{acd} = \frac{d}{c}$.

34. Gleichung.

$$\frac{cx^m}{a + bx} = \frac{fx^m}{d + ex}.$$

Auflöſung.

$$cx^m d + cex^{m+1} = fx^m a + bfx^{m+1}$$

oder, wenn man durchgehends mit x^m dividirt,

$$cd + cex = af + bfx,$$

$$x(ce - bf) = af - cd,$$

folgl. $x = \frac{af - cd}{ce - bf} = \frac{cd - af}{bf - ce}$.*)

---

*) Man kann immer bei einem jeden Bruche die Zeichen des Zählers und Nenners in die entgegengeſetzten verwandeln, weil der Bruch ſeinen Werth nicht verändert, wenn man Zähler und Nenner mit — 1 multiplicirt.

35. Gleichung.

$$\frac{7x^n}{x-1}=\frac{6x^{n+1}+x^n}{x+1}-\frac{3x^n+6x^{n+2}}{x^2-1}.$$

Auflöſung.

Da $x^2-1=x^2-1^2=(x+1)\,(x-1)$, ſo iſt x^2-1 durch $x-1$ und $x+1$ theilbar, folglich kann man x^2-1 als den Hauptnenner der ganzen Gleichung anſehen. Richtet man daher die Zähler wie gewöhnlich ein und läßt die gemeinſchaftlichen Nenner weg, ſo erhält man

$$7x^n+7x^{n+1}=6x^{n+2}+x^{n+1}-6x^{n+1}-x^n-3x^n-6x^{n+2}$$

oder, durch x dividirt,

$$7+7x=6x^2+x-6x-1-3-6x^2$$

oder $6x^2-6x^2+x-6x-7x=7+1+3$

$$-12x=11 \text{ oder } 12x=-11,$$

folgl. $x=-\frac{11}{12}$.

36. Gleichung.

$$\frac{3a-5x}{a-c}+\frac{2a-x}{d}=\frac{a+f}{a-c}-dx.$$

Auflöſung.

Hier iſt der Hauptnenner $=(a-c)\,d$,

folgl. $(3a-5x)\,d+(2a-x)\,(a-c)=(a+f)\,d-(a-c)\,d^2x$

oder $3ad-5dx+2a^2-2ac-ax+cx$

$$=ad+fd-ad^2x+cd^2x,$$

$$x(-5d-a+c+ad^2-cd^2)=-2ad+fd-2a^2+2ac,$$

folgl. $x=\frac{-2ad+fd-2a^2+2ac}{-5d-a+c+ad^2-cd^2}=\frac{d(f-2a)-2a\,(a-c)}{(a-c)\,(d^2-1)-5d}.$

37. Gleichung.

$$\frac{a}{bx} + \frac{c}{dx} + \frac{e}{fx} + \frac{g}{hx} = k.$$

Auflöſung.

$$adfh + bcfh + bdeh + bdfg = kbdfhx,$$

folgl. $x = \dfrac{adfh + bcfh + bdeh + bdfg}{kbdfd}.$

38. Gleichung.

$$\frac{3abc}{a+b} + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3} + \frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2} = 3cx + \frac{bx}{a}.$$

Auflöſung.

Es iſt einleuchtend, daß der Hauptnenner $a(a+b)^3$ iſt. Dividirt man alſo mit den einzelnen Nennern in $a(a+b)^3$ und multiplicirt ſämmtliche Zähler mit den Quotienten, ſo iſt

$$3a^2bc\,(a+b)^2 + a^3b^2 + (2a+b)\,b^2\,(a+b)\,x$$
$$= 3ac\,(a+b)^3x + b\,(a+b)^3\,x$$

oder $[3ac\,(a+b)^3 + b(a+b)^3 - (2a+b)\,b^2\,(a+b)]\,x$

$$= 3a^2bc(a+b)^2 + a^3b^2,$$

$$(a+b)\,[3ac\,(a+b)^2 + b\,(a+b)^2 - (2a+b)\,b^2]\,x$$
$$= ab\,[3ac\,(a+b)^2 + a^2b],$$

$$(a+b)\,(3a^3c+6a^2bc+3ab^2c+a^2b+2ab^2+b^3-2ab^2-b^3)\,x$$
$$= ab\,(3a^3c + 6a^2bc + ab^2c + a^2b),$$

$$(a+b)\,(3a^3c + 6a^2bc + 3ab^2c + a^2b)x$$
$$= ab\,(3a^3c + 6a^2bc + 3ab^2c + a^2b),$$

folgl. $x = \dfrac{ab\,(3a^3c + 6a^2bc + 3ab^2c + a^2b)}{(a+b)(3a^3c+6a^2bc+3ab^2c+a^2b)} = \dfrac{ab}{a+b}.$

39. Gleichung.

$$\frac{bx}{2b-a}-\frac{(3bc+ad)x}{2ab(a+b)}-\frac{5ab}{3c-d}=\frac{(3bc-ad)x}{2ab(a-b)}-\frac{5a(2b-a)}{a^2-b^2}$$

Auflöſung.

Setzt man $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, ſo ſieht man leicht, daß der Hauptnenner in dieſer Gleichung $= 2ab(2b-a)(3c-d)(a^2-b^2)$ iſt, indem dieſer Ausdruck durch die einzelnen Nenner theilbar iſt. Verſieht man daher die Gleichung mit dieſem Hauptnenner und richtet hernach auf die gewöhnliche Art die Zähler ein, ſo erhält man

$$\begin{aligned}&2ab^2(3c-d)(a^2-b^2)x-(3bc+ad)(2b-a)\\&\quad(3c-d)(a-b)x-10a^2b^2(2b-a)(a^2-b^2)\\&=(3bc-ad)(2b-a)(3c-d)(a+b)x\\&\quad-10a^2b(3b-a)^2(3c-d).\end{aligned}$$

Man bringe die Größen, worin x iſt, auf eine Seite:

$$\begin{aligned}&(3bc-ad)(2b-a)(3c-d)(a+b)x+(3bc+ad)\\&(2b-a)(3c-d)(a-b)x-2ab^2(3c-d)(a^2-b)^2x\\&=-10a^2b^2(2b-a)(a^2-b^2)+10a^2b(2b-a)^2\\&\qquad(3c-d).\end{aligned}$$

Auf der linken Seite der Gleichung werfe man den gemeinſchaftlichen Faktor $(3c-d)x$ und auf der rechten Seite den Faktor $5a(2b-a)$ heraus, ſo iſt

$$\begin{aligned}&[(3bc-ad)(2b-a)(a+b)+(3bc+ad)\\&\quad(2b-a)(a-b)-2ab^2(a^2-b^2)](3c-d)x\\&=[-2ab^2(a^2-b^2)+2ab(3c-d)(2b-a)]\,5a(2b-a).\end{aligned}$$

Verrichtet man nun auf beiden Seiten der Gleichung die Multiplikation der in den Haken eingeſchloſſenen Größen wirklich, ſo erhält man

$$x\,(3c-d)\,(12ab^2c+2a^2bd-6a^2bc \\ -4ab^2d-2a^3b^2+2ab^4)$$

$$=5a(2b-a)\,(12ab^2c+2a^2bd-6a^2bc \\ -4ab^2d-2a^3b^2+2ab^4),$$

folgl. $x=\dfrac{\left\{\begin{matrix}5a(2b-a)\,(12ab^2c+2a^2bd-6a^2bc \\ -4ab^2d-2a^3b^2+2ab^4\end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix}(3c-d)\,(12ab^2c+2a^2bd-6a^2bc \\ -4ab^2d-2a^3b^2+2ab^4)\end{matrix}\right\}}$

$$=\frac{5a(2b-a)}{3c-d}.$$

40. Gleichung.

$$(a+x)\,(b+x)-a(b+c)=\frac{a^2c}{b}+x^2.$$

Auflöſung.

$$ab+bx+ax+x^2-x^2=ab+ac+\frac{a^2c}{b}$$

oder $(b+a)x=\dfrac{abc+a^2c}{b}$,

folgl. $x=\dfrac{ac(b+a)}{b(b+a)}=\dfrac{ac}{b}$.

41. Gleichung.

$$\sqrt[m]{x}=a.$$

Auflöſung.

$$(\sqrt[m]{x})^m=a^m,$$

folgl. $x=a^m$.

42. Gleichung.

$$\sqrt[m]{(ax+b)} = \sqrt[m]{(cx+d)}.$$

Auflöſung.

Erhebt man beide Theile der Gleichung zur mten Potenz, ſo erhält man

$$[\sqrt[m]{(ax+b)}]^m = [\sqrt[m]{(cx+d)}]^m$$

$$\text{oder } ax+b = cx+d,$$

$$\text{folgl. } x = \frac{d-b}{a-c}.$$

43. Gleichung.

$$h\sqrt[3]{(ax-b)} = k\sqrt[3]{(cx+dx-f)}.$$

Auflöſung.

Man erhebe beide Ausdrücke der Gleichung zur 3ten Potenz, ſo iſt

$$h^3(ax-b) = k^3(cx+dx-f)$$

$$\text{oder } h^3ax - h^3b = k^3cx + k^3dx - k^3f,$$

$$x(h^3a - k^3c - k^3d) = h^3b - k^3f,$$

$$\text{folgl. } x = \frac{bh^3 - fk^3}{ah^3 - (c+d)k^3}.$$

44. Gleichung.

$$\sqrt[3]{(a^2+c)} = \sqrt[4]{\frac{a^2+c}{d(x+g)}}.$$

Auflöſung.

$$\sqrt[3]{(a^2+c)} = \frac{\sqrt[4]{(a^2+c)}}{\sqrt[4]{d(x+g)}},$$

$$\sqrt[4]{d(x+g)} = \frac{\sqrt[4]{(a^2+c)}}{\sqrt[3]{(a^2+c)}}.$$

Erhebt man beide Theile der Gleichung zur 4ten Potenz, ſo erhält man

$$dx + dg = \frac{a^2 + c}{\sqrt[3]{(a^2 + c)^4}} = \frac{a^2 + c}{(a^2 + c)^{\frac{4}{3}}}$$

$$= \frac{a^2 + c}{(a^2 + c)\,(a^2 + c)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{(a^2 + c)^{\frac{1}{3}}}$$

oder $dx = \frac{1}{\sqrt[3]{(a^2 + c)}} - dg,$

folgl. $x = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{(a^2 + c)}} - dg}{d} = \frac{1}{d\sqrt[3]{(a^2 + c)}} - g.$

45. Gleichung.

$$\sqrt[m]{(a + x)} = \sqrt[2m]{(x^2 + 5ax + b^2)}.$$

Auflöſung.

Es iſt einleuchtend, daß $\sqrt[m]{(a + x)} = \sqrt[2m]{(a + x)^2}$ *)
Es iſt daher

$$\sqrt[2m]{(a + x)^2} = \sqrt[2m]{(x^2 + 5ax + b^2)}.$$

Erhebt man die Gleichung zur 2mten Potenz, ſo iſt

$$(a + x)^2 = x^2 + 5ax + b^2$$

oder $a^2 + 2ax + x^2 = x^2 + 5ax + b^2,$

$$2ax + x^2 - 5ax - x^2 = b^2 - a^2,$$

$$-3ax = b^2 - a^2,$$

---

*) weil nämlich $\sqrt[m]{(a + x)} = (a + x)^{\frac{1}{m}},$
und $\sqrt[2m]{(a + x)^2} = (a + x^{\frac{2}{2m}} = (a + x)^{\frac{1}{m}}.$

folgl. $x = \frac{b^2 - a^2}{-3a} = \frac{a^2 - b^2}{3a}$.

46. Gleichung.

$$c + b\sqrt[m]{(x + d)} = f.$$

Auflöſung.

$$b\sqrt[m]{(x + d)} = f - c$$

oder $b^m(x + d) = (f - c)^m$,

$$b^m x + b^m d = (f - c)^m$$

$$b^m x = (f - c)^m - b^m d,$$

folgl. $x = \frac{(f - c)^m - b^m d}{b^m} = \left(\frac{f - c}{d}\right)^m - d$.

47. Gleichung.

$$\frac{ax}{b}\sqrt{(f^2 x + d^2)} + \frac{afx^2}{b} = cx.$$

Auflöſung.

Wird die Gleichung durch x dividirt, ſo erhält man

$$\frac{a}{b}\sqrt{(f^2 x^2 + d^2)} + \frac{afx}{b} = c$$

oder $\frac{a}{b}\sqrt{(f^2 x^2 + d^2)} = c - \frac{afx}{b}$.*)

Erhebt man die Gleichung zum Quadrat, ſo iſt

---

*) Man ſchafft hier $\frac{afx}{b}$ auf die andere Seite, damit, wenn man beide Theile der Gleichung quadrirt, das Wurzelzeichen wegfalle.

$$\frac{a^2}{b^2}(f^2x^2+d^2) = \left(\frac{bc-afx}{b}\right)^2$$

oder $\frac{a^2f^2x^2}{b^2}+\frac{a^2d^2}{b^2} = \frac{b^2c^2-2abcfx+a^2f^2x^2}{b^2}$,

$$a^2d^2 = b^2c^2 - 2abcfx,$$

$$2abcfx = b^2c^2 - a^2d^2,$$

folgl. $x = \frac{b^2c^2-a^2d^2}{2abcf} = \frac{(bc+ad)(bc-ad)}{2abcf}$.*)

48. Gleichung.

$$a^x = b.$$

Auflöſung.

$$\log.\ a^x = \log.\ b$$

oder $x \log.\ a = \log.\ b$,

folgl. $x = \frac{\log.\ b}{\log.\ a}$.

49. Gleichung.

$$a^{mx}b^{nx} = c.$$

Auflöſung.

$$mx \log.\ a + nx \log.\ b = \log.\ c$$

oder $x(m \log.\ a + n \log.\ b) = \log.\ c$,

folgl. $x = \frac{\log.\ c}{m \log.\ a + n \log.\ b} = \frac{\log.\ c}{\log.\ a^m + \log.\ b^n}$

$$= \frac{\log.\ c}{\log.\ a^m b^n}.$$

---

*) Dieſe Verwandlung gründet ſich darauf, daß das Produkt aus der Summe zweier Größen in ihre Differenz der Differenz ihrer Quadrate gleich iſt.

50. Gleichung

$$a^{mx+f}b^{nx+g} = c^{px+h}d^{qx+k}.$$

Auflöſung.

$$(mx + f) \log. a + (nx + g) \log. b$$
$$= (px + h) \log c + (qx + k) \log. d$$

oder $mx \log. a + f \log. a + nx \log. b + g \log. b$
$$= px \log. c + h \log. c + qx \log. d + k \log. d,$$

$$mx \log. a + nx \log. b - px \log. c - qx \log. d$$
$$= h \log. c + k \log. d - f \log. a - g \log. b,$$

$$x (m \log. a + n \log. b - p \log. c - q \log. d)$$
$$= h \log. c + k \log. d - f \log. a - g \log. b,$$

folgl. $x = \frac{h \log. c + k \log. d - f \log. a - g \log. b}{m \log. a + n \log. b - p \log. c - q \log. d}$

$$= \frac{\log. c^h + \log. d^k - \log. a^f - \log. b^g}{\log. a^m + \log. b^n - \log. c^p - \log. d^q}$$

$$= \frac{\log. \frac{c^h d^k}{a^f b^g}}{\log. \frac{a^m b^n}{c^p d^q}} = \left(\log. \frac{c^h d^k}{a^f b^g}\right) : \left(\log. \frac{a^m b^n}{c^p d^q}\right).$$

51. Gleichung.

$$3^x = 177147.$$

Auflöſung.

$$x \cdot \log. 3 = \log. 177147$$

oder $x \cdot 0{,}4771213 = 5{,}2483338,$

folgl. $x = \frac{5{,}2483338}{0{,}4771213} = 11$ beinahe.

52. Gleichung.

$$2^x = 769.$$

Auflöſung.

$$x \log. 2 = \log. 769$$

oder $x \cdot 0{,}3010300 = 2{,}8859263,$

folgl. $x = \frac{2{,}8859263}{0{,}3010300} = 9{,}586839\ldots$

53. Gleichung.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = 51\tfrac{1}{2}.$$

Auflöſung.

$$x\,(\log. 3 - \log. 4) = \log. \frac{103}{2} = \log. 103 - \log. 2,$$

folgl. $x = \frac{\log. 103 - \log. 2}{\log. 3 - \log. 4}$

$$= \frac{2{,}0128372 - 0{,}3010300}{0{,}4771213 - 0{,}6020600}$$

$$= \frac{1{,}7118072}{-\ 0{,}1249387} = -13{,}701176\ldots$$

54. Gleichung.

$$\left(\frac{756}{345}\right)^{\frac{2}{3x}} = 54783.$$

Auflöſung.

$$\frac{3x}{2}\,(\log. 756 - \log. 345) = \log. 54783,$$

folgl. $x = \frac{\log. 54783}{\frac{3}{2}\,(\log. 756 - \log. 345)}$

$$= \frac{4{,}7386458}{0{,}5110540} = 9{,}272299\ldots$$

55. Gleichung.

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{x} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{7x}{2}} = \frac{7}{12}.$$

Auflöſung.

$$x\,(\log.21 - \log.20) + \tfrac{7}{2}x\,(\log.3 - \log.5) = \log.7 - \log.12,$$

$$\text{folgl. } x = \frac{\log.\ 7 - \log.\ 12.}{\log.\ 21 - \log.\ 20 + \frac{7}{2}\,(\log.\ 3 - \log.\ 5)}$$

$$= \frac{-0{,}2340832}{-0{,}7552811} = 0{,}309928\cdots$$

56. Gleichung.

$$\left(\frac{295}{867}\right)^{3-x} = 632 \cdot \left(\frac{56}{39}\right)^{\frac{5x}{9}}.$$

Auflöſung.

$$(3 - x)\ (\log.\ 295 - \log.\ 867)$$

$$= \log.\ 632 + \tfrac{5}{9}x\ (\log.\ 56 - \log.\ 39)$$

$$\text{oder } -x\ (\log.\ 295 - \log.\ 867) - \tfrac{5}{9}x\ (\log.\ 56 - \log.\ 39)$$

$$= \log.\ 632 - 3\ (\log.\ 295 - \log.\ 867),$$

$$x\ [(-\log.295 + \log.\ 867) - \tfrac{5}{9}\ (\log.\ 56 - \log.39)]$$

$$= \log.\ 632 - 3\ (\log.\ 295 - \log.\ 867),$$

$$\text{folgl. } x = \frac{\log.\ 632 - 3\ (\log.\ 295 - \log.\ 867)}{\log.\ 867 - \log.\ 295 - \frac{5}{9}\ (\log.\ 56 - \log.\ 39)}$$

$$= \frac{2{,}8007171 - 1{,}4045913}{2{,}9380191 - 2{,}4698220 - 0{,}0872908}$$

$$= \frac{4{,}2053084}{0{,}3809063} = 11{,}040270\cdots$$

57. Gleichung.

$$3^{2x} \cdot 5^{6x-7} = 9^{x-2} \cdot 7^{1-x}.$$

Auflöſung.

$$2x\ \log.3+(6x-7)\log.5=(x-2)\log.9+(1-x)\log.7$$

oder $2x\cdot\log.3+6x\cdot\log.5-x\cdot\log.9+x\cdot\log.7$

$$=7\log.5-2\log.9+\log.7,$$

folgl. $x=\dfrac{7\log.5-2\log.9+\log.7}{2\log.3+6\log.5-\log.9+\log.7}$

$$=\frac{4{,}8927900-1{,}9084850+0{,}8450980}{0{,}9542426+4{,}1938200-0{,}9542425+0{,}8450980}$$

$$=\frac{3{,}8294030}{5{,}0389181}=0{,}759965\ldots$$

II.

Auflöſungen der Gleichungen vom erſten Grade mit mehreren unbekannten Größen.

1. Gleichung.

$$x + y = a,$$
$$x - y = b.$$

Auflöſung.

Addirt man beide Gleichungen, ſo erhält man

$$2x = a + b,$$

$$\text{folgl.}\quad x = \frac{a+b}{2}$$

Subtrahirt man beide Gleichungen, ſo erhält man

$$2y = a - b$$

$$\text{folgl.}\ y = \frac{a-b}{2}.$$

2. Gleichung.

$$\text{I.}\ 3x + 2y = 118,$$
$$\text{II.}\quad x + 5y = 191.$$

Auflöſung.

Multiplicirt man die Gleichung (II.) mit 3, ſo erhält man $3x + 15y = 573$. Zieht man von dieſer die Gleichung (I.) ab, ſo bleibt

$$13y = 455,$$

$$\text{folgl.}\quad y = 35.$$

Hieraus ergiebt ſich

$$x = 16$$

3. Gleichung.

$$\text{I. } 7x + \tfrac{5}{2}y = 411\tfrac{1}{2},$$

$$\text{II. } 39x - 14y = -935\tfrac{9}{10}.$$

Auflöſung.

Multiplicirt man die Gleichung (I.) mit 39 und (II.) mit 7, ſo erhält man zwei andere Gleichungen

$$\text{III. } 273x + 97\tfrac{1}{2}y = 16048\tfrac{1}{2},$$

$$\text{IV. } 273x - 98y = -6551\tfrac{3}{10}.$$

Subtrahirt man (IV.) von (III.), ſo bleibt

$$195\tfrac{1}{2}y = 22599\tfrac{4}{5},$$

$$\text{folgl. } y = \frac{22599\frac{4}{5}}{195\frac{1}{2}} = \frac{225998}{1955} = 115\tfrac{3}{5}.\text{*)}$$

Subſtituirt man dieſen Werth von y in (I.) oder (II.), ſo erhält man $x = 17\tfrac{1}{2}$.

4. Gleichung.

$$\text{I. } 5x - 8\tfrac{1}{2} = 7y - 44,$$

$$\text{II. } 2x = y + \tfrac{5}{7}.$$

Auflöſung.

Man verwandele beide Gleichungen in folgende:

$$\text{III. } 5x - 7y = -35\tfrac{1}{2},$$

$$\text{IV. } 2x - y = \tfrac{5}{7}.$$

Multiplicirt man (IV.) mit 7, ſo erhält man

$$14x - 7y = 5.$$

Hiervon (III.) abgezogen, giebt

---

*) Der größte allgemeine Theiler iſt 391.

$$9x = 40\tfrac{1}{2},$$
folgl. $x = 4\tfrac{1}{2}$,
und $y = 8\tfrac{2}{7}$.

5. Gleichung.

I. $5\tfrac{3}{4}y - 11x = 4y + 117\tfrac{1}{8}$,
II. $8x + 175 = 2y$.

Auflöſung.

Man verwandle beide Gleichungen in folgende:

III. $1\tfrac{3}{4}y - 11x = 117\tfrac{1}{8}$,
IV. $-2y + 8x = -175$.

Multiplicirt man nun die Gleichung (III.) mit 8 und (IV.) mit 11, ſo erhält man

V. $14y - 88x = 937$,
VI. $-22y + 88x = -1925$.

Addirt man beide Gleichungen, ſo iſt

$$-8y = -988,$$
folgl. $y = 123\tfrac{1}{2}$,
und $x = 9$.

6. Gleichung.

I. $7y = 2x - 3y$,
II. $19x = 60y + 621\tfrac{1}{4}$.

Auflöſung.

Aus der Gleichung (I.) ergiebt ſich, daß $x = 5y$. Subſtituirt man dieſen Werth von x in (II.), ſo erhält man

$$35y = 621\tfrac{1}{4},$$

folgl. $y = 17\frac{3}{4}$,

und $x = 88\frac{3}{4}$.

7. Gleichung.

$$\text{I. } 13x + 7y - 341 = 7\tfrac{1}{2}y + 43\tfrac{1}{2}x,$$

$$\text{II. } 2x + \tfrac{1}{2}y = 1.$$

Auflöſung.

Die Gleichung (I.) verwandle man in

$$\tfrac{1}{2}y + 30\tfrac{1}{2}x = -341$$

und ziehe davon (II.) ab, ſo erhält man

$$28\tfrac{1}{2}x = -342,$$

folgl. $x = -12$,

und $y = 50$.

8. Gleichung.

$$\text{I. } 113\tfrac{1}{2}x - 27\tfrac{5}{7}y = 10y + 5488\tfrac{4}{7},$$

$$\text{II. } 9y - 347 = 5x - 420.$$

Auflöſung.

Man verwandle beide Gleichungen in folgende:

$$\text{III. } 113\tfrac{1}{2}x - 37\tfrac{5}{7}y = 5488\tfrac{4}{7},$$

$$\text{IV. } -5x + 9y = -73.$$

Multiplicirt man die Gleichung (III.) mit 5, und (IV.) mit $113\frac{1}{2}$, ſo erhält man

$$\text{V. } 567\tfrac{1}{2}x - 188\tfrac{4}{7}y = 27442\tfrac{6}{7},$$

$$\text{VI. } -567\tfrac{1}{2}x + 1021\tfrac{1}{2}y = -8285\tfrac{1}{2}.$$

Addirt man beide Gleichungen, ſo iſt

$$832\tfrac{13}{14}y = 19157\tfrac{5}{14},$$

folgl. $y = 23$,

und $x = 56$.

9. Gleichung.

I. $168\frac{15}{44} - 19x + \frac{3}{11}y = 12\frac{3}{4}x + 1084,$

II. $\frac{1}{3}x - 149\frac{1}{2} = 319\frac{2}{9} - \frac{7}{2}y.$

Auflöſung.

Man verwandle beide Gleichungen in folgende:

III. $\frac{3}{11}y - 31\frac{3}{4}x = 915\frac{29}{44},$

IV. $\frac{7}{2}y + \frac{1}{3}x = 468\frac{13}{18}.$

Multiplicirt man nun die Gleichung (III.) mit $\frac{7}{2}$ und (IV.) mit $\frac{3}{11}$, ſo erhält man

V. $\frac{21}{22}y - 111\frac{1}{8}x = 3204\frac{71}{88},$

VI. $\frac{21}{22}y + \frac{1}{11}x = 127\frac{5}{6}.$

Subtrahirt man (VI.) von (V.), ſo iſt

$-111\frac{19}{88}x = 3076\frac{257}{264},$

folgl. $x = -27\frac{2}{3},$

und $y = 136\frac{5}{9}.$

10. Gleichung.

I. $x + y = 18{,}73,$

II. $0{,}56x + 13{,}421y = 763{,}4.$

Auflöſung.

Multiplicirt man (I.) mit 0,56, ſo erhält man

$0{,}56x + 0{,}56y = 10{,}4888.$

Subtrahirt man dieſe Gleichung von (II.), ſo iſt

$12{,}861y = 752{,}9112,$

folgl. $y = 58{,}5421\cdots,$

und $x = -39{,}8121\cdots$

11. Gleichung.

I. $(x + 5)(y + 7) = (x + 1)(y - 9) + 112,$

II. $2x + 10 = 3y + 1.$

Auflöſung.

Man ſchaffe in der Gleichung (I.) die Klammern durch die wirkliche Multiplication weg, ſo erhält man

$$xy + 5y + 7x + 35 = xy + y - 9x - 9 + 112.$$

Es laſſen ſich daher die Gleichungen (I.) und (II.)

in III. $4y + 16x = 68$

und IV. $-3y + 2x = -9$

verwandeln. Multiplicirt man nun (IV.) mit 8, ſo erhält man

$$-24y + 16x = -72.$$

Subtrahirt man hiervon (III.), ſo hat man

$$-28y = -140$$

und hieraus $y = 5$; mithin $x = 3$.

12. Gleichung.

I. $ax = by$,

II. $x + y = c$.

Auflöſung.

Man verwandle (I.) in

III. $ax - by = 0$

und multiplicire (II.) mit a, ſo erhält man

IV. $ax + ay = ac$.

Subtrahirt man (III.) von (IV.), ſo bleibt

$$ay + by = ac$$

oder $y\,(a + b) = ac$,

folgl. $y = \frac{ac}{a + b}$

und $x = c - y = \frac{bc}{a + b}$.

13. Gleichung.

$$\text{I. } ax + by = c,$$
$$\text{II. } fx + gy = h.$$

Auflöſung.

Man multiplicire (I.) mit f und (II.) mit a, ſo erhält man

$$\text{III. } afx + bfy = cf,$$
$$\text{IV. } afx + agy = ah.$$

Subtrahirt man (III.) von (IV.), ſo bleibt

$$agy - bfy = ah - cf,$$
$$\text{folgl. } y = \frac{ah - cf}{ag - bf}$$
$$\text{und daher } x = \frac{c - by}{a} = \frac{cg - bh}{ag - bf}.$$

14. Gleichung.

$$\text{I. } \frac{a}{b + y} = \frac{b}{3a + x},$$
$$\text{II. } ax + 2by = d.$$

Auflöſung.

Man ſchaffe in (I.) die Nenner fort, ſo iſt

$$ax + 3a^2 = by + b^2$$
$$\text{oder } ax - by = b^2 - 3a^2.$$

Subtrahirt man dieſe Gleichung von (II.), ſo bleibt

$$3by = 3a^2 - b^2 + d,$$
$$\text{folgl. } y = \frac{3a^2 - b^2 + d}{3b}$$
$$\text{und daher } x = \frac{d - 2by}{a} = \frac{2b^2 - 6a^2 + d}{3a}.$$

15. Gleichung.

$$\text{I. } bcx = cy - 2b,$$

$$\text{II. } b^2y + \frac{a(c^3 - b^3)}{bc} = \frac{2b^3}{c} + c^3x.$$

Auflöſung.

Man ſchaffe in (II.) die Nenner weg, indem man die ganze Gleichung mit bc multiplicirt, und bringe die unbekannten Größen auf eine Seite, ſo erhält man

$$\text{III. } -bc^4x + b^3cy = -ac^3 + ab^3 + 2b^4.$$

Man multiplicire ferner (I.) mit c^3, ſo iſt

$$\text{IV. } bc^4x - c^4y = -2bc^3.$$

Addirt man nun die Gleichungen (III.) und (IV.), ſo erhält man

$$y(b^3c - c^4) = 2b^4 - ac^3 + ab^3 - 2bc^3,$$

$$\text{folgl. } y = \frac{2b^4 - ac^3 + ab^3 - 2bc^3}{b^3c - c^4}$$

$$= \frac{2b(b^3 - c^3) + a(b^3 - c^3)}{c(b^3 - c^3)}$$

$$= \frac{(2b + a)(b^3 - c^3)}{c(b^3 - c^3)} = \frac{a + 2b}{c}.$$

Subſtituirt man dieſen Werth für y in (I.), ſo iſt

$$x = \frac{\frac{c(a + 2b)}{c} - 2b}{bc} = \frac{a}{bc}.$$

16. Gleichung.

$$\text{I. } 3x + 5y = \frac{(8b - 2f)bf}{b^2 - f^2},$$

II. $b^2 x - \frac{bcf^2}{b+f} + (b+c+f)fy = f^2 x + (b+2f)bf.$

Auflöſung.

Man verwandle die Gleichungen (I.) und (II.) in

III. $3(b^2 - f^2)x + 5(b^2 - f^2)y = (8b - 2f)bf,$

IV. $(b^2 - f^2)x + (b+c+f)fy = (b+2f)bf + \frac{bcf^2}{b+f},$

multiplicire (IV.) mit 3, welches

V. $3(b^2 - f^2)x + 3(b+c+f)fy = 3(b+2f)bf + \frac{3bcf^2}{b+f}$

giebt, und ſubtrahire (V.) von (III.), ſo bleibt

$$(5b^2 - 5f^2 - 3bf - 3cf - 3f^2)y$$

$$= [(8b - 2f) - 3(b+2f)]bf - \frac{3bcf^2}{b+f}$$

$$= (5b - 8f)bf - \frac{3cf}{b+f}bf$$

oder $(5b^2 - 8f^2 - 3bf - 3cf)y$

$$= \frac{(5b^2 - 3bf - 8f^2 - 3cf)}{b+f}bf,$$

folgl. $y = \frac{(5b^2 - 3bf - 8f^2 - 3cf)bf}{(5b^2 - 3bf - 8f^2 - 3cf)(b+f)} = \frac{bf}{b+f}.$

Subſtituirt man dieſen Werth für y in (III.), ſo iſt

$3(b^2 - f^2)x + 5(b - f)bf$*) $= (8b - 2f)bf$

oder $3(b^2 - f^2)x = 3(b+f)bf,$

folgl. $x = \frac{3(b+f)bf}{3(b^2 - f^2)} = \frac{3(b+f)bf}{3(b+f)(b-f)}$

$$= \frac{bf}{b-f}.$$

---

*) weil nämlich $b^2 - f^2$ aus den Faktoren $(b+f)(b-f)$ zuſammengeſetzt iſt.

17. Gleichung.

I. $x + y = 10,$

II. $x + z = 19,$

III. $y + z = 23.$

Auflöſung.

Subtrahirt man (I.) von (II.), ſo bleibt

IV. $z - y = 9.$

Addirt man (IV.) und (III.), ſo erhält man

$2x = 32,$

folgl. $z = 16$; und daher $x = 3$; $y = 7$.

18. Gleichung.

I. $x + y + z = 29\frac{1}{4},$

II. $x + y - z = 18\frac{1}{4},$

III. $x - y + z = 13\frac{3}{4}.$

Auflöſung.

Subtrahirt man (II.) von (I.), ſo erhält man

$2z = 11$, folgl. $z = 5\frac{1}{2}$.

Subtrahirt man (III.) von (I.), ſo bleibt

$2y = 15\frac{1}{2}$; folgl. $y = 7\frac{3}{4}$,

mithin iſt $x = 16$.

19. Gleichung.

I. $x + y + z = a,$

II. $my = nx,$

III. $pz = qx.$

Auflöſung.

Aus (II.) ergiebt ſich $y = \frac{nx}{m}$.

Aus (III.) ergiebt ſich $z = \frac{qx}{p}$.

Subſtituirt man dieſe Werthe für y und z in (I.), ſo erhält man

$$x + \frac{nx}{m} + \frac{qx}{p} = a$$

oder $x\,(pm + pn + qm) = amp$,

folgl. $x = \frac{amp}{pm + pn + qm}$.

Subſtituirt man dieſen Werth für x in (II.), ſo erhält man

$$my = n\,\frac{amp}{pm + pn + qm},$$

folgl. $y = \frac{namp}{m\,(pm + pn + qm)} = \frac{anp}{pm + pn + qm}$.

Auf gleiche Art findet man durch (III.)

$$z = \frac{amq}{pm + pn + qm}.$$

20. Gleichung.

I. $3x + 5y = 161$,
II. $7x + 2z = 209$,
III. $2y + z = 89$.

Auflöſung.

Man multiplicire (III.) mit 2, ſo erhält man

IV. $4y + 2z = 178$.

Dieſe Gleichung ziehe man von (II.) ab, ſo bleibt

V. $7x - 4y = 31$.

Nun multiplicire man (I.) mit 7 und (V.) mit 3, ſo giebt dieſes

VI. $21x + 35y = 1127$,
VII. $21x - 12y = 93$.

Endlich ſubtrahire man (VII.) von (VI.), ſo bleibt

$$47y = 1034,$$

folgl. $y = 22$; und hieraus ferner $x = 17$; $z = 45$.

21. Gleichung.

I. $y + \frac{1}{2}x = 41$,
II. $x + \frac{1}{4}z = 20\frac{1}{2}$,
III. $y + \frac{1}{5}z = 34$.

Auflöſung.

Man ſubtrahire (III.) von (I.), ſo bleibt

IV. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{5}z = 7$.

Nun multiplicire man (II.) mit $\frac{1}{2}$, wodurch man

V. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}z = 10\frac{1}{4}$

erhält. Subtrahirt man ferner (IV.) von (V.), ſo bleibt

$$\frac{13}{40}z = \frac{13}{4},$$

folgl. $z = 10$; und daher $x = 18$; $y = 32$.

22. Gleichung.

I. $ax + by = c$,
II. $dx + ey = f$,
III. $gy + hz = l$.

Auflöſung.

Multiplicirt man (I.) mit e und (II.) mit b, ſo erhält man

$$\text{IV. } aex + bey = ce,$$
$$\text{V. } bdx + bey = bf.$$

Man ſubtrahire (V.) von (IV.), ſo bleibt

$$x\,(ae - bd) = ce - bf,$$

$$\text{folgl. } x = \frac{ce - bf}{ae - bd}.$$

Subſtituirt man dieſen Werth für x in (II.), ſo iſt

$$y = \frac{f - \dfrac{d\,(ce - bf)}{ae - bd}}{e}$$
$$= \frac{aef - bdf - cde + bdf}{e\,(ae - bd)}$$
$$= \frac{af - cd}{ae - bd}.$$

Subſtituirt man endlich den Werth von y in (III.), ſo findet man

$$z = \frac{l - \dfrac{g\,(af - cd)}{ae - bd}}{h}$$

$$= \frac{ael - bdl - afg + cdg}{h\,(ae - bd)} = \frac{a\,(el - fg) - d\,(bl - cg)}{h\,(ae - bd)}.$$

23. Gleichung.

$$\text{I. } 53 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}z = y - 109,$$
$$\text{II. } \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{8}y = 26,$$
$$\text{III. } 5y = 4z.$$

Auflöſung.

Man verwandle zuvörderſt die Gleichung (I.) in

$$\text{IV. } y + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}z = 162$$

und (III.) in

$$\text{V.}\ 5y - 4z = 0.$$

Alsdann multiplicire man (IV.) mit $\frac{1}{2}$, welches

$$\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}z = 81$$

giebt. Subtrahirt man hiervon (II.), ſo bleibt

$$\tfrac{3}{8}y + \tfrac{1}{4}z = 55.$$

Dieſe Gleichung multiplicire man ferner mit 16. Dieſes giebt

$$6y + 4z = 880.$$

Hierzu addire man (V.), ſo erhält man

$$11y = 880,$$

$$\text{folgl. } y = 80;\ x = 64;\ z = 100.$$

24. Gleichung.

$$\text{I.}\quad 2x - \tfrac{3}{4}y = 93 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}y,$$
$$\text{II.}\quad 7x - 5z = y + x - 86,$$
$$\text{III.}\quad \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{4}z = 58.$$

Auflöſung.

Man verwandle die Gleichung (I.) in

$$\text{IV.}\ 2\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y = 93$$

und die Gleichung (II.) in

$$\text{V.}\ 6x - y - 5z = -86.$$

Multiplicirt man (IV.) mit 2, welches

$$5x - y = 186$$

giebt, und zieht dieſe Gleichung von (V.) ab, ſo bleibt

$$\text{VI.}\quad x - 5z = -272.$$

Nun multiplicire man (III.) mit 3, ſo erhält man

$$\tfrac{3}{2}x + y + \tfrac{3}{4}z = 174.$$

Hierzu addire man (V.), ſo iſt

$$\text{VII.}\quad 7\tfrac{1}{2}x - 4\tfrac{1}{4}z = 88.$$

Ferner multiplicire man (VI.) mit $7\frac{1}{2}$, ſo iſt

$$7\tfrac{1}{2}x - 37\tfrac{1}{2}z = -2040.$$

Dieſe Gleichung von (VII.) abgezogen, giebt

$$33\tfrac{1}{4}z = 2128,$$

folgl. $z = 64$; $x = 48$; $y = 54$.

25. Gleichung.

$$\text{I.}\quad 3x - 100 = 5y + 360,$$
$$\text{II.}\quad 2\tfrac{1}{3}x + 200 = 16\tfrac{1}{2}z - 610,$$
$$\text{III.}\quad 2y + 3z = 548.$$

Auflöſung.

Man verwandle die Gleichung (I.) in

$$\text{IV.}\quad 3x - 5y = 460$$

und die Gleichung (II.) in

$$\text{V.}\quad 2\tfrac{1}{3}x - 16\tfrac{1}{2}z = -810.$$

Alsdann multiplicire man (IV.) mit 2 und (III.) mit 5, ſo erhält man

$$6x - 10y = 920,$$
$$15z + 10y = 2740.$$

Addirt man dieſe beiden Gleichungen, ſo iſt

$$\text{VI.}\quad 6x + 15z = 3660.$$

Multiplicirt man ferner die Gleichung (V.) mit 6, und (VI.) mit $2\frac{1}{3}$, ſo erhält man

$$\text{VII.}\quad 14x - 99z = -4860,$$
$$\text{VIII.}\quad 14x + 35z = 8540.$$

Subtrahirt man (VII.) von (VIII.), ſo iſt

$$134z = 13400,$$

folgl. $z = 100;\ x = 360;\ y = 124.$

26. Gleichung.

$$\text{I.}\quad 4x + 7y + 159 = 0,$$

$$\text{II.}\quad 3\tfrac{1}{3}x = \tfrac{1}{6}z - 55,$$

$$\text{III.}\quad 2x + y + 9z = 498.$$

Auflöſung.

Man verwandle die Gleichung (I.) in

$$\text{IV.}\quad 4x + 7y = -159$$

und die Gleichung (II.) in

$$\text{V.}\quad 3\tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{6}z = -55.$$

Alsdann multiplicire man (III.) mit 7, welches

$$\text{VI.}\quad 14x + 7y + 63z = 3486$$

giebt, und ſubtrahire (IV.) von (VI.), ſo bleibt

$$\text{VII.}\quad 10x + 63z = 3645.$$

Ferner multiplicire man (V.) mit 10 und (VII.) mit $3\tfrac{1}{3}$, ſo iſt

$$\text{VIII.}\quad \tfrac{100}{3}x - \tfrac{5}{3}z = -550,$$

$$\text{IX.}\quad \tfrac{100}{3}x + 210z = 12150.$$

Subtrahirt man endlich (VIII.) von (IX.), ſo bleibt

$$211\tfrac{2}{3}z = 12700,$$

folgl. $z = 60;\ x = -13\tfrac{1}{2};\ y = -15.$

27. Gleichung.

$$\text{I.}\quad 2x + 5y - 7z = -288,$$

$$\text{II.}\quad 5x - y + 3z = 227,$$

$$\text{III.}\quad 7x + 6y + z = 297.$$

Auflöſung.

Man multiplicire die Gleichung (II.) mit 3, welches

IV. $25x - 5y + 15z = 1135$

giebt, und addire (I.) und (IV.), ſo erhält man

V. $27x + 8z = 847.$

Ferner multiplicire man (II.) mit 6, wodurch man

VI. $30x - 6y + 18z = 1362$

erhält, und addire (III.) und (VI.), ſo iſt

VII. $37x + 19z = 1659.$

Nun multiplicire man (VII.) mit 8, und (V.) mit 19, ſo erhält man

VIII. $296x + 152z = 13272,$

IX. $513x + 152z = 16093.$

Endlich ſubtrahire man (VIII.) von (IX.), ſo bleibt

$$217x = 2821,$$

folgl. $x = 13;\ y = 24;\ z = 62.$

28. Gleichung.

I. $x + y + z = 30,$

II. $8x + 4y + 2z = 50,$

III. $27x + 9y + 3z = 64.$

Auflöſung.

Man multiplicire die Gleichung (I.) mit 2, ſo iſt

$$2x + 2y + 2z = 60.$$

Dieſe Gleichung ziehe man von (II.) ab, ſo bleibt

IV. $6x + 2y = -10.$

Ferner multiplicire man (I.) mit 3, ſo iſt

$$3x + 3y + 3z = 90.$$

Dieſe Gleichung ſubtrahire man von (III.), ſo bleibt

$$\text{V. } 24x + 6y = -26.$$

Endlich multiplicire man (V.) mit 2 und (IV.) mit 6, ſo erhält man

$$\text{VI. } 48x + 12y = -52,$$

$$\text{VII. } 36x + 12y = -60.$$

Nun ſubtrahire man noch (VII.) von (VI.), ſo bleibt

$$12x = 8,$$

folgl. $x = \frac{2}{3}$; $y = -7$; $z = 36\frac{1}{3}$.

29. Gleichung.

$$\text{I. } 18x - 7y - 5z = 11,$$

$$\text{II. } 4\tfrac{2}{5}y - \tfrac{2}{3}x + z = 108,$$

$$\text{III. } 3\tfrac{1}{2}z + 2y + \tfrac{3}{4}x = 80.$$

Auflöſung.

Zuvörderſt multiplicire man die Gleichung (II.) mit 5, ſo iſt

$$-\tfrac{10}{3}x + 22y + 5z = 540.$$

Hierzu die Gleichung (I.) addirt, giebt

$$\text{IV. } 14\tfrac{2}{3}x + 15y = 551.$$

Ferner multiplicire man (II.) mit $3\frac{1}{2}$, wodurch man

$$3\tfrac{1}{2}z + 15\tfrac{2}{5}y - 2\tfrac{1}{3}x = 378$$

erhält, und ziehe hiervon (III.) ab, ſo bleibt

$$\text{V. } 13\tfrac{2}{5}y - 3\tfrac{1}{12}x = 298.$$

Nun multiplicire man (V.) mit 15 und (IV.) mit $13\frac{2}{5}$, ſo iſt

$$\text{VI. } 201y - 46\tfrac{1}{4}x = 4470,$$

$$\text{VII. } 201y + 196\tfrac{8}{15}x = 7383\tfrac{2}{5}.$$

Subtrahirt man alſo (VI.) von (VII.), ſo bleibt

$$242\tfrac{47}{60}x = 2913\tfrac{2}{5},$$

folgl. $x = 12$; $y = 25$; $z = 6$.

30. Gleichung.

$$\begin{aligned} &\text{I.} && ax + by + cz = h, \\ &\text{II.} && a'x + b'y + c'z = h', \\ &\text{III.} && a''x + b''y + c''z = h''. \end{aligned}$$

Auflöſung.

Man multiplicire die Gleichung (I.) mit a' und (II.) mit a, ſo erhält man

$$\begin{aligned} &\text{IV.} && aa'x + ba'y + ca'z = a'h, \\ &\text{V.} && aa'x + ab'y + ac'z = ah'. \end{aligned}$$

Subtrahirt man (IV.) von (V.), ſo bleibt

$$\text{VI. } (ab' - a'b)y + (ac' - a'c)z = a'h - ah'.$$

Ferner multiplicire man (II.) mit a'' und (III.) mit a', ſo iſt

$$\begin{aligned} &\text{VII.} && a'a''x + a''b'y + a''c'z = a''h', \\ &\text{VIII.} && a'a''x + a'b''y + a'c''z = a'h''. \end{aligned}$$

Subtrahirt man (VII.) von (VIII.), ſo bleibt

$$\text{IX. } (a'b'' - a''b')y + (a'c'' - a''c')z = a'h'' - a''h'.$$

Endlich multiplicire man (VI.) mit $a'b'' - a''b'$, und (IX.) mit $ab' - a'b$, wodurch man

$$\text{X. } \left\{ \begin{matrix} (a'b''-a''b')(ab'-a'b)y + (a'b''-a''b')(ac'-a'c)z \\ = (a'b'' - a''b')\,(a'h - ah') \end{matrix} \right\},$$

$$\text{XI. } \left\{ \begin{matrix} (a'b''-a''b')(ab'-a'b)y + (ab'-a'b)(a'c''-a''c')z \\ = (ab' - a'b)\,(a'h'' - a''h') \end{matrix} \right\}$$

erhält, und ſubtrahire (XI.) von (X.), ſo bleibt

$$[(a'b'' - a''b')(ac' - a'c) - (ab' - a'b)(a'c'' - a''c')]z$$
$$= (a'b'' - a''b')(a'h - ah') - (ab' - a'b)(a'h'' - a''h'),$$

folgl. $z = \dfrac{(a'b''-a''b')(a'h+ah')-(ab'-a'b)(a'h''-a''h')}{(a'b''-a''b')(ac'-a'c)-(ab'-a'b)(a'c''-a''c')}$

Verrichtet man die Multiplication wirklich, und läßt im Zähler und Nenner den gemeinſchaftlichen Faktor a weg, ſo erhält man

$$z = \frac{ab'h''-ab''h'+a'b''h-a'bh''+a''bh'-a''b'h}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}.$$

Auf ähnliche Art findet man

$$x = \frac{hb'c''-hb''c'+h'b''c-h'bc''+h''bc'-h''b'c}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c},$$

$$y = \frac{ah'c''-ah''c'+a'h''c-a'hc''+a''hc'-a''h'c}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}.$$

31. Gleichung.

I. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a,$

II. $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = b,$

III. $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = c.$

Auflöſung.

Man ſubtrahire (II.) von (I.), ſo bleibt

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{z} = a - b.$$

Hierzu addire man die Gleichung (III.), ſo iſt

$$\frac{2}{y} = a - b + c,$$

folgl. $y = \frac{2}{a-b+c}$; $x = \frac{2}{a+b-c}$;

$$z = \frac{2}{b+c-a}.$$

32. Gleichung.

$$\text{I.}\quad \frac{2}{x} - \frac{5}{3y} + \frac{1}{z} = 3\tfrac{4}{27},$$

$$\text{II.}\quad \frac{1}{4x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 6\tfrac{11}{72},$$

$$\text{III.}\quad \frac{5}{6x} - \frac{1}{y} + \frac{4}{z} = 12\tfrac{1}{36}.$$

Auflöſung.

Man addire die Gleichungen (II.) und (III.), ſo erhält man

$$\text{IV.}\quad \frac{13}{12x} + \frac{6}{z} = 18\tfrac{13}{72}.$$

Man multiplicire ferner (II.) mit $\frac{5}{3}$, welches

$$\frac{5}{12x} + \frac{5}{3y} + \frac{10}{3z} = 10\tfrac{55}{216}$$

giebt, und addire hierzu die Gleichung (I.), ſo iſt

$$\text{V.}\quad \frac{29}{12x} + \frac{13}{3z} = 13\tfrac{29}{72}.$$

Endlich multiplicire man (V.) mit 13 und (IV.) mit 29, ſo erhält man

$$\text{VI.}\quad \frac{377}{12x} + \frac{169}{3z} = 174\tfrac{17}{72},$$

$$\text{VII.}\quad \frac{377}{12x} + \frac{174}{z} = 527\tfrac{17}{72}.$$

Subtrahirt man nun (VI.) von (VII.), ſo bleibt

$$\frac{353}{3z} = 353 \text{ oder } \frac{1}{3z} = 1,$$

$$\text{folgl. } z = \tfrac{1}{3};\ x = 6;\ y = 9.$$

33. Gleichung.

$$\text{I. } \frac{2x + 3y}{x + y} = 2\tfrac{1}{5},$$

$$\text{II. } \frac{x + z}{5(x - z)} = \tfrac{1}{3},$$

$$\text{III. } \frac{10x - 3z}{4x - 2z} = 2\tfrac{9}{14}.$$

Auflöſung.

Aus (I.) ergiebt ſich

$$2x + 3y = 2\tfrac{1}{5}x + 2\tfrac{1}{5}y,$$

$$\text{folgl. } x = 4y.$$

Aus (II.) ergiebt ſich

$$x + z = \tfrac{5}{3}x - \tfrac{5}{3}z,$$

$$\text{folgl. } x = 4z.$$

Aus (III.) ergiebt ſich endlich

$$10x - 3z = 10\tfrac{4}{7}x - 5\tfrac{2}{7}z,$$

$$\text{folgl. } x = 4z.$$

Aus den gegebenen Gleichungen erhält man alſo weiter nichts, als daß y ſo groß wie z, und daß x vier mal ſo groß, als y oder z iſt. Das Reſultat iſt alſo unbeſtimmt, indem man immer eine der drei unbekannten Größen willkührlich annehmen kann, woraus ſich alsdann die beiden übrigen ergeben. Iſt z. E. y = 1, ſo iſt $z = 1$, $x = 4$. Iſt $y = 4$, ſo iſt $z = 4$, $x = 16$ u. ſ. w.*)

34. Gleichung.

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & ax + by = l, \\ \text{II.} & cx + du = m, \\ \text{III.} & ex + fz = n, \\ \text{IV.} & gy + hz = p. \end{array}$$

Auflöſung.

Aus (I.) ergiebt ſich

$$x = \frac{l - by}{a}$$

und aus (III.)

$$x = \frac{n - fz}{e}.$$

Es iſt daher

$$\frac{l - by}{a} = \frac{n - fz}{e}$$

---

*) Dieſe Aufgabe mag übrigens als Beiſpiel dienen, daß, um die Werthe von mehreren unbekannten Größen zu finden, nicht allein ſo viele Gleichungen, als unbekannte Größen gegeben ſein müſſen, ſondern dieſe Gleichungen müſſen auch von der Art ſein, daß ſich aus jeder derſelben eine eigene Beziehung der gegebenen bekannten und unbekannten Größen gegen einander herleiten laſſe. In gegenwärtiger Aufgabe iſt das Reſultat der dritten Gleichung dem der zweiten völlig gleich; daher kann die Auflöſung keine beſtimmten Werthe geben, weil für die drei unbekannten Größen eigentlich nur zwei Gleichungen gegeben ſind.

und $y = \frac{el - a(n - fz)}{be}$.

Nun ergiebt ſich aus (IV.)

$$y = \frac{p - hz}{g}.$$

Es iſt alſo

$$\frac{p - hz}{g} = \frac{el - a(n - fz)}{be}.$$

Aus dieſer Gleichung findet man

$$z = \frac{bep + (an - el)g}{beh + afg}.$$

Subſtituirt man dieſen Werth für z in (IV.), ſo findet man

$$y = \frac{afp + (el - an)h}{beh + afg}.$$

Dieſen Werth in (I.) geſetzt, giebt

$$x = \frac{bhn + (gl - bp)f}{beh + afg}.$$

Subſtituirt man endlich dieſen Ausdruck in (II.), ſo findet man auch

$$u = \frac{bh(em - cn) + gf(am - cl) + bcfp}{d(beh + afg)}.$$

35. Gleichung.

I. $x - 9y + 3z - 10u = 21$,
II. $2x + 7y - z - u = 683$,
III. $3x + y + 5z + 2u = 195$,
IV. $4x - 6y - 2z - 9u = 516$.

Auflöſung.

Multiplicirt man die Gleichung (I.) mit 2, ſo iſt

$$2x - 18y + 6z - 20u = 42.$$

Dieſe Gleichung von (II.) abgezogen, giebt

$$\text{V.}\quad 25y - 7z + 19u = 641.$$

Multiplicirt man ferner (I.) mit 3, ſo iſt

$$3x - 27y + 9z - 30u = 63.$$

Dieſe Gleichung von (III.) abgezogen, giebt

$$\text{VI.}\quad 28y - 4z + 32u = 132.$$

Man multiplicire nun (VI.) mit 7 und (V.) mit 4, ſo erhält man

$$\text{VII.}\quad 196y - 28z + 224u = 924,$$

$$\text{VIII.}\quad 100y - 28z + 76u = 2564.$$

Man ſubtrahire (VIII.) von (VII.), ſo bleibt

$$\text{IX.}\quad 96y + 148u = -1640.$$

Ferner multiplicire man (II.) mit 2, ſo iſt

$$4x + 14y - 2z - 2u = 1366.$$

Hiervon (IV.) abgezogen, giebt

$$\text{X.}\quad 20y + 7u = 850.$$

Multiplicirt man nun (X.) mit 96 und (IX.) mit 20, welches

$$\text{XI.}\quad 1920y + 672u = 81600,$$

$$\text{und XII.}\quad 1920y + 2960u = -32800$$

giebt, und ziehet (XI.) von (XII.) ab, ſo bleibt

$$2288u = -114400,$$

folgl. $u = -50$; $x = 100$; $y = 60$;

$$z = -13.$$

36. Gleichung.

I. $x + y + z + u = 1,$

II. $16x + 8y + 4z + 2u = 9,$

III. $81x + 27y + 9z + 3u = 36,$

IV. $256x + 64y + 16z + 4u = 100.$

Auflöſung.

Der Werth der unbekannten Größen läßt ſich hier, wegen der beſondern Natur der gegebenen Gleichungen (die darin beſteht, daß in der erſten Gleichung die Coefficienten der unbekannten Größen 1 ſind; in den drei andern Gleichungen aber die Coefficienten eine fallende geometriſche Reihe bilden, deren Exponenten wieder unter ſich eine arithmetiſche Reihe, deren Exponent 1 iſt, darſtellen, nämlich 2, 3, 4), auf eine ſehr kurze Art folgendergeſtalt finden. Man nehme die Differenz der erſten und zweiten, der zweiten und dritten, der dritten und vierten Gleichung, ſo erhält man

(II.) − (I.) = V. $15x + 7y + 3z + u = 8,$

(III.) − (II.) = VI. $65x + 19y + 5z + u = 27,$

(IV.) − (III.) = VII. $175x + 37y + 7z + u = 64.$

Nun nehme man ferner die Differenz der erſten und fünften, der fünften und ſechſten, der ſechſten und ſiebenten Gleichung, ſo erhält man

(V.) − (I.) = VIII. $14x + 6y + 2z = 7,$

(VI.) − (V.) = IX. $50x + 12y + 2z = 19,$

(VII.) − (VI.) = X. $110x + 18y + 2z = 37.$

Nimmt man abermals die Differenz der achten und neunten, der neunten und zehnten Gleichung, ſo giebt dieſes

$$(\text{IX.}) - (\text{VIII.}) = \text{XI.}\quad 36x + 6y = 12,$$
$$(\text{X.}) - (\text{IX.}) = \text{XII.}\quad 60x + 6y = 18.$$

Die Differenz dieſer beiden Gleichungen giebt

$$24x = 6,$$

folgl. $x = \frac{1}{4}$; und alſo $y = \frac{1}{2}$; $z = \frac{1}{4}$; $u = 0$.

37. Gleichung.

$$\text{I.}\quad \frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{2z}{7} = 58,$$
$$\text{II.}\quad \frac{5x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 76,$$
$$\text{III.}\quad \frac{x}{2} + \frac{3z}{8} + \frac{u}{5} = 79,$$
$$\text{IV.}\quad y + z + u = 248.$$

Auflöſung.

Man multiplicire (I.) mit $\frac{1}{2}$ und (III.) mit $\frac{1}{3}$, ſo iſt

$$\text{V.}\quad \frac{x}{6} + \frac{y}{10} + \frac{z}{7} = 29,$$
$$\text{VI.}\quad \frac{x}{6} + \frac{z}{8} + \frac{u}{15} = 26\tfrac{1}{3}.$$

Subtrahirt man (VI.) von (V.), ſo iſt

$$\text{VII.}\quad \frac{y}{10} + \frac{z}{56} - \frac{u}{15} = 2\tfrac{2}{3}.$$

Ferner multiplicire man (II.) mit $\frac{1}{2}$ und (III.) mit $\frac{5}{4}$, ſo iſt

$$\text{VIII.}\quad \frac{5x}{8}+\frac{y}{12}+\frac{z}{6}=38,$$

$$\text{IX.}\quad \frac{5x}{8}+\frac{u}{4}+\frac{15z}{32}=98\tfrac{3}{4}.$$

Subtrahirt man (VIII.) von (IX.), ſo bleibt

$$\text{X.}\quad \frac{29z}{96}+\frac{u}{4}-\frac{y}{12}=60\tfrac{3}{4}.$$

Multiplicirt man nun (IV.) mit $\frac{1}{12}$, welches

$$\frac{y}{12}+\frac{z}{12}+\frac{u}{12}=20\tfrac{2}{3}$$

giebt, und addirt dieſe Gleichung zu (X.), ſo iſt

$$\text{XI.}\quad \frac{37z}{96}+\frac{u}{3}=81\tfrac{5}{12}.$$

Multiplicirt man nochmals (IV.) mit $\frac{1}{10}$, welches

$$\frac{y}{10}+\frac{z}{10}+\frac{u}{10}=24\tfrac{4}{5}$$

giebt, und ſubtrahirt von dieſer Gleichung (VII.), ſo bleibt

$$\text{XII.}\quad \frac{23z}{280}+\frac{u}{6}=22\tfrac{2}{15}.$$

Multiplicirt man endlich (XII.) mit 2, wodurch man

$$\frac{23z}{140}+\frac{u}{3}=44\tfrac{4}{15}$$

erhält, und ſubtrahirt dieſe Gleichung von (XI.), ſo bleibt

$$\frac{743z}{3360}=\frac{743}{20},$$

folgl. $z = 168$; $x = 12$; $y = 30$; $u = 50$.

38. Gleichung.

$$\frac{xy}{ay+bx}=l,$$

$$\frac{yz}{cz+dy}=m,$$

$$\frac{xz}{ez+fx}=n.$$

Auflöſung.

Um dieſe Gleichungen auf die kürzeſte Art aufzulöſen, erwäge man, daß ein jeder Bruch nichts weiter als das Verhältniß zwiſchen Zähler und Nenner angiebt. Die Gleichheit zweier Brüche iſt alſo als eine Proportion anzuſehen, wobei entweder die Zähler die Vorder=, und die Nenner die Hinterglieder, oder die Nenner die Vorder=, und die Zähler die Hinterglieder bedeuten. Iſt daher z. E.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ oder } a:b=c:d,$$

ſo iſt auch

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c} \text{ oder } b:a=d:c.$$

Setzt man alſo bei den hier gegebenen Gleichungen für die Größen l, m, n, die Brüche $\frac{l}{1}, \frac{m}{1}, \frac{n}{1}$, kehrt die Brüche auf beiden Seiten der Gleichung um, und hebt die gleichen Größen in Zähler und Nenner gegen einander auf, ſo erhält man

$$\text{I. } \frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{1}{l},$$

$$\text{II.}\quad \frac{c}{y} + \frac{d}{z} = \frac{1}{m},$$

$$\text{III.}\quad \frac{e}{x} + \frac{f}{z} = \frac{1}{n}.$$

Man multiplicire (I.) mit e und (III.) mit a, ſo iſt

$$\text{IV.}\quad \frac{ae}{x} + \frac{be}{y} = \frac{e}{l},$$

$$\text{V.}\quad \frac{ae}{x} + \frac{af}{z} = \frac{a}{n}.$$

(IV.) von (V.) ſubtrahirt, giebt

$$\frac{af}{z} - \frac{be}{y} = \frac{a}{n} - \frac{e}{l}.$$

Multiplicirt man dieſe Gleichung mit d, und (II.) mit af, welches

$$\text{VI.}\quad \frac{afd}{z} - \frac{bde}{y} = \frac{ad}{n} - \frac{de}{l},$$

$$\text{VII.}\quad \frac{afd}{z} + \frac{acf}{y} = \frac{af}{m}$$

giebt, und ziehet (VI.) von (VII.) ab, ſo bleibt

$$\frac{acf + bde}{y} = \frac{af}{m} - \frac{ad}{n} + \frac{de}{l}$$

$$\text{oder } acf + bde = y\,\frac{afnl - adml + demn}{mnl},$$

$$\text{folgl. } y = \frac{lmn\,(acf + dbe)}{afln - adlm + demn}.$$

Dieſen Ausdruck in (I.) ſubſtituirt, giebt

$$x = \frac{lmn\,(acf + bde)}{cfmn - bfln + bdlm}$$

und in (II.) ſubſtituirt, giebt

$$z = \frac{lmn\,(acf + bde)}{beln - cemn + aclm}.$$

39. Gleichung.

$$\begin{aligned} x+y+z+u+t &= a, \\ x+y+z+u+w &= b, \\ x+y+z+t+w &= c, \\ x+y+u+t+w &= d, \\ x+z+u+t+w &= e, \\ y+z+u+t+w &= f. \end{aligned}$$

Auflöſung.

Die Natur dieſer Gleichungen bietet auch hier einen kürzern Weg zur Auflöſung dar. Man ſetze nämlich die Summe der ſechs unbekannten Größen $x+y+z+t+u+w=S$, und die Summe der ſechs bekannten Größen $a+b+c+d+e+f=s$, ſo erhält man ſtatt der gegebenen Gleichungen, da in der erſten alle unbekannten Größen außer w, in der zweiten alle unbekannten Größen außer t, u. ſ. w. enthalten ſind:

$$\begin{aligned} S-w &= a, \\ S-t &= b, \\ S-u &= c, \\ S-z &= d, \\ S-y &= e, \\ S-x &= f. \end{aligned}$$

Addirt man dieſe Gleichungen, ſo erhält man

$$6S-(w+t+u+z+y+x)=s$$

oder $5S=s$,

und $S=\frac{s}{5}$,

das iſt $w + t + u + z + y + x = \frac{s}{5}$.

Zieht man von dieſer Gleichung ſucceſſive die erſte, zweite, dritte, vierte, fünfte und ſechſte der gegebenen Gleichungen ab, ſo erhält man unmittelbar

$$w = \frac{s}{5} - a;\ t = \frac{s}{5} - b;\ u = \frac{s}{5} - c;$$

$$z = \frac{s}{5} - d;\ y = \frac{s}{5} - e;\ x = \frac{s}{5} - f.$$

III.

Auflöſungen der Gleichungen vom zweiten Grade mit einer unbekannten Größe.

1. Gleichung.

$$ax^2 = b.$$

Auflöſung.

$$x^2 = \frac{b}{a},$$ *)

$$\text{folgl. } x = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)}.$$

---

*) In der allgemeinen Formel zur Auflöſung der quadratiſchen Gleichungen, welche Herr Meier Hirſch in ſeiner Sammlung von Beiſpielen ꝛc. S. 136 angegeben hat, iſt auch die hier gefundene reine quadratiſche Gleichung $x^2 = \frac{b}{a}$ begriffen. Denn man braucht nur $P = 0$, $Q = \frac{b}{a}$ zu ſetzen, ſo iſt

$$x^2 + 0x = \frac{b}{a}$$

und hieraus

$$x = -\frac{0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0^2}{4} + \frac{b}{a}\right)}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

2. Gleichung.

$$x^2 + 6x = 27.$$

Auflöſung.

$$x^2 + 6x + 9 = 27 + 9 = 36.$$

Zieht man auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, ſo iſt

$$x + 3 = \pm 6,$$

$$\text{folgl. } x = \quad 6 - 3 = 3$$

$$\text{oder } x = -6 - 3 = -9.$$

3. Gleichung.

$$x^2 - 7x + 3\tfrac{1}{4} = 0.$$

Auflöſung.

$$x^2 - 7x = -3\tfrac{1}{4}$$

$$\text{oder } x^2 - 7x + \frac{49}{4} = -3\tfrac{1}{4} + \frac{49}{4} = 9.$$

Man ziehe auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, ſo iſt

$$x - \frac{7}{2} = \pm 3,$$

$$\text{folgl. } x = \quad 3 + \frac{7}{2} = 6\tfrac{1}{2}$$

$$\text{oder } x = -3 + \frac{7}{2} = \frac{1}{2}.$$

4. Gleichung.

$$x^2 - 5\tfrac{3}{4}x = 18.$$

Auflöſung.

$$x^2 - 5\tfrac{3}{4}x + \left(\frac{23}{8}\right)^2 = 18 + \left(\frac{23}{8}\right)^2 = \frac{1681}{64}.$$

Auf beiden Seiten die Quadratwurzel ausgezogen, giebt

$$x - \frac{23}{8} = \pm \frac{41}{8},$$

$$\text{folgl. } x = \frac{41}{8} + \frac{23}{8} = 8$$

$$\text{oder } x = -\frac{41}{8} + \frac{23}{8} = -2\tfrac{1}{4}.$$

5. Gleichung.

$$3x^2 - 2x = 65.$$

Auflöſung.

$$x^2 - \frac{2x}{3} = \frac{65}{3}$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{2x}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{65}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{196}{9}.$$

Hieraus die Quadratwurzel gezogen, giebt

$$x - \frac{1}{3} = \pm \frac{14}{3},$$

$$\text{folgl. } x = \frac{14}{3} + \frac{1}{3} = 5$$

$$\text{oder } x = -\frac{14}{3} + \frac{1}{3} = -4\tfrac{1}{3}.$$

6. Gleichung.

$$622x = 15x^2 + 6384.$$

Auflöſung.

$$x^2 - \frac{622x}{15} = -\frac{6384}{15}$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{622x}{15} + \left(\frac{311}{15}\right)^2 = -\frac{6384}{15} + \left(\frac{311}{15}\right)^2 = \frac{961}{15^2},$$

alſo $x - \frac{311}{15} = \pm \frac{31}{15}$,

folgl. $x = \frac{31}{15} + \frac{311}{15} = 22\frac{4}{5}$

oder $x = -\frac{31}{15} + \frac{311}{15} = 18\frac{2}{3}$.

7. Gleichung.

$$20748 - 1616x + 21x^2 = 0.$$

Auflöſung.

$$21x^2 - 1616x = -20748$$

oder $x^2 - \frac{1616x}{21} = -988$,

alſo $x^2 - \frac{1616x}{21} + \left(\frac{808}{21}\right)^2 = -988 + \left(\frac{808}{21}\right)^2$

$= \frac{217156}{21^2}$,

und $x - \frac{808}{21} = \pm \frac{466}{21}$,

folgl. $x = \frac{466}{21} + \frac{808}{21} = 60\frac{2}{3}$

oder $x = -\frac{466}{21} + \frac{808}{21} = 16\frac{2}{7}$.

8. Gleichung.

$$9\tfrac{3}{5}x - 21\tfrac{15}{16} = x^2.$$

Auflöſung.

$$x^2 - 9\tfrac{3}{5}x = -21\tfrac{15}{16}$$

oder $x^2 - \frac{48x}{5} + \left(\frac{24}{5}\right)^2 = -21\frac{15}{16} + \left(\frac{24}{5}\right)^2 = \frac{441}{400}$,

$$\text{alſo } x - \frac{24}{5} = \pm \frac{21}{20},$$

$$\text{folgl. } x = \frac{21}{20} + \frac{24}{5} = 5\tfrac{17}{20}$$

$$\text{oder } x = -\frac{21}{20} + \frac{24}{5} = 3\tfrac{3}{4}.$$

9. Gleichung.

$$11\tfrac{3}{4}x - 3\tfrac{1}{2}x^2 = -41\tfrac{1}{4}.$$

Auflöſung.

$$3\tfrac{1}{2}x^2 - 11\tfrac{3}{4}x = 41\tfrac{1}{4}.$$

Schafft man ſämmtliche Nenner weg, ſo iſt

$$14x^2 - 47x = 165$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{47x}{14} = \frac{165}{14},$$

$$\text{alſo } x^2 - \frac{47x}{14} + \left(\frac{47}{28}\right)^2 = \frac{165}{14} + \left(\frac{47}{28}\right)^2 = \frac{11449}{28^2},$$

$$\text{und } x - \frac{47}{28} = \pm \frac{107}{28},$$

$$\text{folgl. } x = \frac{107}{28} + \frac{47}{28} = 5\tfrac{1}{2}$$

$$\text{oder } x = -\frac{107}{28} + \frac{47}{28} = -2\tfrac{1}{7}.$$

10. Gleichung.

$$9\tfrac{1}{3}x^2 - 90\tfrac{1}{3}x + 195 = 0.$$

Auflöſung.

$$9\tfrac{1}{3}x^2 - 90\tfrac{1}{3}x = -195.$$

Werden ſämmtliche Nenner weggeſchafft, ſo iſt

$$28x^2 - 271x = -585$$

oder $$x^2 - \frac{271x}{28} = -\frac{585}{28},$$

alſo $$x^2 - \frac{271x}{28} + \left(\frac{271}{56}\right)^2 = -\frac{585}{28} + \left(\frac{271}{56}\right)^2$$

$$= \frac{7921}{56^2},$$

und $$x - \frac{271}{66} = \pm\frac{89}{56},$$

folgl. $$x = \frac{89}{56} + \frac{271}{56} = 6\tfrac{3}{7}$$

oder $$x = -\frac{89}{56} + \frac{271}{56} = 3\tfrac{1}{4}.$$

11. Gleichung

$$\frac{18x^2}{5} + \frac{18078x}{65} + 4728 = 0.$$

Auflöſung.

$$\frac{18x^2}{5} + \frac{18078x}{65} = -4728.$$

Schafft man die Nenner aus der Gleichung weg, welches

$$234x^2 + 18078x = -307320$$

giebt, und dividirt ſie durch 6, ſo iſt

$$39x^2 + 3013x = -51220$$

oder $$x^2 + \frac{3013x}{39} = -\frac{51220}{39},$$

alſo $$x^2 + \frac{3013x}{39} + \left(\frac{3013}{78}\right)^2 = -\frac{51220}{39} + \left(\frac{3013}{78}\right)^2$$

$$= \frac{1087849}{78^2},$$

und $x + \frac{3013}{78} = \pm \frac{1043}{78}$,

folgl. $x = \frac{1043}{78} - \frac{3013}{78} = -25\frac{10}{39}$

oder $x = -\frac{1043}{78} - \frac{3013}{78} = -52.$

12. Gleichung.

$$x^2 - 8x = 14.$$

Auflöſung.

$$x^2 - 8x + 16 = 14 + 16 = 30,$$

alſo $x - 4 = \pm \sqrt{30}$,

folgl. $x = 4 + \sqrt{30} = 9,4772\ldots$

oder $x = 4 - \sqrt{30} = -1,4772\ldots$

13. Gleichung.

$$3x^2 + x = 7.$$

Auflöſung.

$$x^2 + \frac{x}{3} = \frac{7}{3}$$

oder $x^2 + \frac{x}{3} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{7}{3} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{85}{36}$,

und $x + \frac{1}{6} = \pm \sqrt{\frac{85}{36}}$,

folgl. $x = -\frac{1}{6} + \sqrt{\frac{85}{36}} = \frac{-1 + \sqrt{85}}{6} = 1,3699\ldots$

und $x = -\frac{1}{6} - \sqrt{\frac{85}{36}} = \frac{-1 - \sqrt{85}}{6} = -1,7032\ldots$

14. Gleichung.

$$118x - 2\tfrac{1}{2}x^2 = 20.$$

Auflöſung.

$$2\tfrac{1}{2}x^2 - 118x = -20$$

oder $x^2 - \frac{236x}{5} = -8,$

alſo $x^2 - \frac{236x}{5} + \left(\frac{118}{5}\right)^2 = -8 + \left(\frac{118}{5}\right)^2 = \frac{13724}{5^2}$

oder $x - \frac{118}{5} = \pm\sqrt{\frac{13724}{5^2}},$

folgl. $x = \frac{118}{5} + \sqrt{\frac{13724}{5^2}} = \frac{118 + \sqrt{13724}}{5}$

$= 47{,}0298\ldots$

oder $x = \frac{118}{5} - \sqrt{\frac{13724}{5^2}} = \frac{118 - \sqrt{13724}}{5}$

$= 0{,}1701\ldots$

15. Gleichung.

$$6x - 30 = 3x^2.$$

Auflöſung.

Man dividire die Gleichung durch 3, und ordne ſie, ſo iſt

$$x^2 - 2x = -10$$

oder $x^2 - 2x + 1 = -10 + 1 = -9,$

und $x - 1 = \pm\sqrt{-9},$

folgl. $x = 1 + \sqrt{-9}$

oder $x = 1 - \sqrt{-9}$.*)

---

*) Die Aufgabe, welche auf eine ſolche Gleichung führt, iſt alſo unmöglich.

16. Gleichung.

$$8x^2 - 7x + 34 = 0.$$

Auflöſung.

$$8x^2 - 7x = -34$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{7x}{8} = -\frac{34}{8},$$

$$\text{und } x^2 - \frac{7x}{8} + \left(\frac{7}{16}\right)^2 = -\frac{34}{8} + \left(\frac{7}{16}\right)^2 = \frac{-1039}{16^2}$$

$$\text{oder } x - \frac{7}{16} = \pm\sqrt{\frac{-1039}{16^2}},$$

$$\text{folgl. } x = \frac{7}{16} + \sqrt{\frac{-1039}{16^2}} = \frac{7 + \sqrt{-1039}}{16}$$

$$\text{oder } x = \frac{7}{16} - \sqrt{\frac{-1039}{16^2}} = \frac{7 - \sqrt{-1039}}{16}.$$

17. Gleichung.

$$4x^2 - 9x = 5x^2 - 255\tfrac{3}{4} - 8x.$$

Auflöſung.

Man reducire und ordne die Gleichung, ſo iſt

$$x^2 + x = 255\tfrac{3}{4}$$

$$\text{oder } x^2 + x + \tfrac{1}{4} = 255\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4} = 256,$$

$$\text{und } x + \tfrac{1}{2} = \pm 16,$$

$$\text{folgl. } x = 16 - \tfrac{1}{2} = 15\tfrac{1}{2}$$

$$\text{oder } x = -16 - \tfrac{1}{2} = -16\tfrac{1}{2}.$$

18. Gleichung.

$$80x + \frac{3x^2}{4} + \frac{21x - 27782}{12} = 1859\tfrac{1}{3} - 3x^2.$$

Auflöſung.

Zuvörderſt ſchaffe man die Nenner weg, indem man die ganze Gleichung mit dem General-Nenner 12 multiplicirt, und Zähler und Nenner gegen einander aufhebt, ſo erhält man

$$960x + 9x^2 + 21x - 27782 = 22312 - 36x^2.$$

Man reducire und ordne die Gleichung gehörig, ſo iſt

$$45x^2 + 981x = 50094.$$

Dieſe Gleichung durch 9 dividirt, giebt

$$5x^2 + 109x = 5566$$

$$\text{oder } x^2 + \frac{109x}{5} = \frac{5566}{5},$$

$$\text{und } x^2 + \frac{109x}{5} + \left(\frac{109}{10}\right)^2 = \frac{5566}{5} + \left(\frac{109}{10}\right)^2$$

$$= \frac{123201}{10^2}$$

$$\text{oder } x + \frac{109}{10} = \pm \frac{351}{10},$$

$$\text{folgl. } x = \frac{351}{10} - \frac{109}{10} = 24\tfrac{1}{5}$$

$$\text{oder } x = -\frac{351}{10} - \frac{109}{10} = -46.$$

19. Gleichung.

$$\frac{x}{x + 60} = \frac{7}{3x - 5}.$$

Auflöſung.

Man ſchaffe die Nenner weg, indem man x mit 3x − 5, und 7 mit x + 60 multiplicirt, und den General-Nenner (x + 60) (3x − 5) gänzlich wegläßt, ſo iſt

$$3x^2 - 5x = 7x + 420$$

oder $3x^2 - 12x = 420$,

das iſt $x^2 - 4x = 140$,

alſo $x^2 - 4x + 4 = 140 + 4 = 144$,

und $x - 2 = \pm 12$,

folgl. $x = 2 + 12 = 14$

oder $x = 2 - 12 = -10$.

20. Gleichung.

$$\frac{40}{x-5} + \frac{27}{x} = 13.$$

Auflöſung.

Schafft man die Nenner weg, indem man nämlich die ganze Gleichung mit dem General-Nenner (x − 5)x multiplicirt, und Zähler und Nenner gegen einander aufhebt, ſo iſt

$$40x + 27x - 135 = 13x^2 - 65x.$$

Ordnet man ferner die Gleichung, ſo erhält man

$$13x^2 - 132x = -135$$

oder $x^2 - \frac{132x}{13} = -\frac{135}{13}$

und $x^2 - \frac{132x}{13} + \left(\frac{66}{13}\right)^2 = -\frac{135}{13} + \left(\frac{66}{13}\right)^2 = \frac{2601}{13^2}$

$$\text{oder } x - \frac{66}{13} = \pm\frac{51}{13},$$

$$\text{folgl. } x = \frac{51}{13} + \frac{66}{13} = 9$$

$$\text{oder } x = -\frac{51}{13} + \frac{66}{13} = 1\tfrac{2}{13}.$$

21. Gleichung.

$$\frac{8x}{x+2} - 6 = \frac{20}{3x}.$$

Auflöſung.

Man ſchaffe auf die vorhergehende Art die Nenner weg, indem man mit (x + 2) 3x multiplicirt, ſo iſt

$$24x^2 - 18x^2 - 36x = 20x + 40.$$

Man ordne die Gleichung, ſo iſt

$$6x^2 - 56x = 40$$

$$\text{oder } 3x^2 - 28x = 20,$$

$$\text{und } x^2 - \frac{28x}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{28x}{3} + \left(\frac{14}{3}\right)^2 = \frac{20}{3} + \left(\frac{14}{3}\right)^2 = \frac{256}{3^2},$$

$$\text{alſo } x - \frac{14}{3} = \pm\frac{16}{3},$$

$$\text{folgl. } x = \frac{14}{3} + \frac{16}{3} = 10$$

$$\text{oder } x = \frac{14}{3} - \frac{16}{3} = -\tfrac{2}{3}.$$

22. Gleichung.

$$\frac{48}{x+3} = \frac{165}{x+10} - 5.$$

Auflöſung.

Schafft man die Nenner weg, indem man die Gleichung mit (x + 3) (x + 10) multiplicirt, ſo iſt

$$48x + 480 = 165x + 495 - 5x^2 - 65x - 150.$$

Dieſe Gleichung geordnet, giebt $5x^2 - 52x = -135$

$$\text{oder } x^2 - \frac{52x}{5} = -27,$$

$$\text{und } x^2 - \frac{52x}{5} + \left(\frac{26}{5}\right)^2 = -27 + \left(\frac{26}{5}\right)^2 = \frac{1}{5^2},$$

$$\text{alſo } x - \frac{26}{5} = \pm\frac{1}{5},$$

$$\text{folgl. } x = \frac{26}{5} + \frac{1}{5} = 5\tfrac{2}{5}$$

$$\text{oder } x = \frac{26}{5} - \frac{1}{5} = 5.$$

23. Gleichung.

$$\frac{31}{6x} = \frac{16}{117 - 2x} + 1.$$

Auflöſung.

Wenn man zuvörderſt die Brüche durch die Multiplication mit 6x (117 − 2x) wegſchafft, ſo iſt

$$3627 - 62x = 96x + 702x - 12x^2.$$

Ordnet man dieſe Gleichung, ſo erhält man

$$12x^2 - 860x = -3627$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{215x}{3} = -\frac{1209}{4},$$

$$\text{und } x^2 - \frac{215x}{3} + \left(\frac{215}{6}\right)^2 = -\frac{1209}{4} + \left(\frac{215}{6}\right)^2$$

$$= \frac{35344}{6^2}$$

$$\text{oder } x - \frac{215}{6} = \pm\frac{188}{6},$$

$$\text{folgl. } x = \frac{188}{6} + \frac{215}{6} = 67\tfrac{1}{6}$$

$$\text{oder } x = -\frac{188}{6} + \frac{215}{6} = 4\tfrac{1}{2}.$$

24. Gleichung.

$$\frac{2x+3}{10-x} = \frac{2x}{25-3x} - 6\tfrac{1}{2}.$$

Auflöſung.

Man ſchaffe die Nenner aus der Gleichung weg, wodurch man

$$-12x^2 + 82x + 150 = 40x - 4x^2 - 3250 + 715x - 39x^2$$

erhält. Dieſe Gleichung geordnet, giebt

$$31x^2 - 673x = -3400$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{673x}{31} = -\frac{3400}{31},$$

$$\text{alſo } x^2 - \frac{673x}{31} + \left(\frac{673}{62}\right)^2 = -\frac{3400}{31} + \left(\frac{673}{62}\right)^2$$

$$= \frac{31329}{62^2},$$

und $$x - \frac{673}{62} = \pm \frac{177}{62},$$

folgl. $$x = \frac{177}{62} + \frac{673}{62} = 13\tfrac{22}{31}$$

oder $$x = -\frac{177}{62} + \frac{673}{62} = 8.$$

25. Gleichung.

$$\frac{25x + 180}{10x - 81} = \frac{40x}{5x - 8} - \tfrac{3}{5}.$$

Auflöſung.

Wenn man die Nenner aus dieſer Gleichung wegſchafft, ſo iſt

$$625x^2 + 3500x - 7200$$
$$= 2000x^2 - 16200x - 150x^2 + 1455x - 1944.$$

Dieſe Gleichung geordnet, giebt

$$1225x^2 - 18245x = -5256$$

oder $$x^2 - \frac{3649x}{245} = -\frac{5256}{1225},$$

alſo $$x^2 - \frac{3649x}{245} + \left(\frac{3649}{490}\right)^2 = -\frac{5256}{1225} + \left(\frac{3649}{490}\right)^2$$
$$= \frac{12285025}{490^2}$$

oder $$x - \frac{3649}{490} = \pm \frac{3505}{490},$$

folgl. $$x = \frac{3505}{490} + \frac{3649}{490} = 14\tfrac{3}{5}$$

oder $$x = -\frac{3505}{490} + \frac{3649}{490} = \frac{72}{245}.$$

26. Gleichung.

$$\frac{18+x}{6(3-x)} = \frac{20x+9}{19-7x} - \frac{65}{4(3-x)}.$$

Auflöſung.

Hier iſt der General-Nenner 12 (3 – x) (19 – 7x). Multiplicirt man hiermit die ganze Gleichung, nachdem man, wie gewöhnlich, mit dem Special-Nenner eines jeden Bruchs hinein dividirt, und den Quotienten mit dem Zähler multiplicirt, ſo erhält man

$$-14x^2 - 214x + 684 =$$
$$-240x^2 + 612x + 324 - 3705 + 1365x.$$

Ordnet man dieſe Gleichung, ſo iſt

$$226x^2 - 2191x = -4065$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{2191x}{226} = -\frac{4065}{226},$$

$$\text{alſo } x^2 - \frac{2191x}{226} + \left(\frac{2191}{452}\right)^2 = -\frac{4065}{226} + \left(\frac{2191}{452}\right)^2$$

$$= \frac{1125721}{452^2}$$

$$\text{oder } x - \frac{2191}{452} = \pm\frac{1061}{452}$$

$$\text{folgl. } x = \frac{1061}{452} + \frac{2191}{452} = 7\tfrac{22}{113}$$

$$\text{oder } x = -\frac{1061}{452} + \frac{2191}{452} = 1\tfrac{1}{2}.$$

27. Gleichung.

$$adx - acx^2 = bcx - bd.$$

Auflöſung.

Nachdem die Gleichung geordnet, iſt

$$acx^2 + (bc - ad)\,x = bd$$

oder $$x^2 + \frac{(bc - ad)\,x}{ac} = \frac{bd}{ac},$$

und $$x^2 + \frac{(bc - ad)\,x}{ac} + \left(\frac{bc-ad}{2ac}\right)^2 = \frac{bd}{ac} + \left(\frac{bc-ad}{2ac}\right)^2$$

oder $$x + \frac{bc - ad}{2ac} = \pm\sqrt{\left[\frac{bd}{ac} + \left(\frac{bc - ad}{2ac}\right)^2\right]},$$

folgl. $$x = -\frac{bc - ad}{2ac} \pm\sqrt{\left[\frac{bd}{ac} + \left(\frac{bc - ad}{2ac}\right)^2\right]}$$

$$= -\frac{bc - ad}{2ac} \pm\sqrt{\frac{b^2c^2 + 2abcd + a^2d^2}{(2ac)^2}}$$

$$= -\frac{bc - ad}{2ac} + \frac{bc + ad}{2ac}$$

$$= \frac{-bc + ad + bc + ad}{2ac} = \frac{2ad}{2ac} = \frac{d}{c}$$

oder $$x = -\frac{bc - ad}{2ac} - \frac{bc + ad}{2ac}$$

$$= \frac{-bc + ad - bc - ad}{2ac} = \frac{-2bc}{2ac} = -\frac{b}{a}.$$

28. Gleichung.

$$\frac{a^2x^2}{f^2} - \frac{2ax}{g} + \frac{f^2}{g^2} = 0.$$

Auflöſung.

Man ordne die Gleichung, ſo iſt

$$\frac{a^2x^2}{f^2} - \frac{2ax}{g} = -\frac{f^2}{g^2}$$

oder $x^2 - \frac{2f^2x}{ag} = -\frac{f^4}{a^2g^2}$,

alſo $x^2 - \frac{2f^2x}{ag} + \frac{f^4}{a^2g^2} = -\frac{f^4}{a^2g^2} + \frac{f^4}{a^2g^2} = 0.$

Zieht man aus beiden Theilen der Gleichung die Quadratwurzel, ſo iſt

$$x - \frac{f^2}{ga} = \pm 0,$$

folglich ſind beide Werthe von

$$x = \frac{f^2}{ag}.$$

29. Gleichung.

$$abx^2 + \frac{3a^2x}{c} = \frac{6a^2 + ab - 2b^2}{c^2} - \frac{b^2x}{c}.$$

Auflöſung.

Ordnet man die Gleichung, ſo iſt

$$abx^2 + \frac{(3a^2+b^2)x}{c} = \frac{6a^2 + ab - 2b^2}{c^2}$$

oder $x^2 + \frac{(3a^2+b^2)x}{abc} = \frac{6a^2 + ab - 2b^2}{abc^2}$,

alſo $x^2 + \frac{(3a^2+b^2)x}{abc} + \left(\frac{3a^2+b^2}{2abc}\right)^2$

$$= \frac{6a^2 + ab - 2b^2}{abc^2} + \left(\frac{3a^2+b^2}{2abc}\right)^2,$$

und $x + \frac{3a^2+b^2}{2abc} = \pm\sqrt{\left[\left(\frac{3a^2+b^2}{2abc}\right)^2 + \frac{6a^2+ab-2b^2}{abc^2}\right]}$

$$= \pm\sqrt{\frac{9a^4 + 6a^2b^2 + b^4 + 24a^3b + 4a^2b^2 - 8ab^3}{(2abc)^2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{9a^4 + 24a^3b + 10a^2b^2 - 8ab^3 + b^4}{(2abc)^2}}.$$

Zieht man die Quadratwurzel wirklich aus,*) ſo erhält man

$$x + \frac{3a^2 + b^2}{2abc} = \pm \frac{3a^2 + 4ab - b^2}{2abc},$$

folgl. $x = \frac{3a^2 + 4ab - b^2}{2abc} - \frac{3a^2 + b^2}{2abc}$

$$= \frac{4ab - 2b^2}{2abc} = \frac{2b\,(2a - b)}{2abc} = \frac{2a - b}{ac}$$

oder $x = -\frac{3a^2 + 4ab - b^2}{2abc} - \frac{3a^2 + b^2}{2abc}$

$$= -\frac{6a^2 + 4ab}{2abc} = -\frac{2a\,(3a + 2b)}{2abc} = -\frac{3a + 2b}{bc}.$$

30. Gleichung.

$$\frac{2c^2}{d^2} + \frac{ac}{d} - (a - b)\ (2c + ad)\frac{x}{d}$$

$$= (a + b)\,\frac{cx}{d} - (a^2 - b^2)\,x^2.$$

Auflöſung.

Nachdem man die Gleichung geordnet, ſo iſt

---

*) Man zieht aus Buchſtabenausdrücken eben ſo die Quadratwurzel, wie aus Zahlen, z. B.

$$\begin{array}{rl} & \text{Wurzel } \underline{3a^2 + 4ab - b^4} \\ & 9a^4 + 24a^3b + 10a^2b^2 - 8ab^3 + b^4 \\ (3a^2)^2 = & \underline{9a^4} \\ & 0 \\ (6a^2 + 4ab)\ 4ab = & \underline{24a^3b + 16a^2b^2} \\ & -6a^2b^2 - 8ab^3 + b^4 \\ (6a^2 + 8ab - b^2)\cdot - b^2 = & \underline{-6a^2b^2 - 8ab^3 + b^4} \\ & 0 \end{array}$$

$$(a^2-b^2)x^2 - \frac{(a-b)(2c+ad)+(a+b)c}{d}x$$

$$= -\frac{2c^2}{d^2} - \frac{ac}{d} = -\frac{2c^2+acd}{d^2}$$

oder $x^2 - \frac{(a-b)(2c+ad)+(a+b)c}{d(a^2-b^2)}x$

$$= -\frac{2c^2+acd}{d^2(a^2-b^2)},$$

alſo $x^2 - \frac{(a-b)(2c+ad)+(a+b)c}{d(a^2-b^2)}x$

$$+\left[\frac{(a-b)(2c+ad)+(a+b)c}{2d(a^2-b^2)}\right]^2$$

$$= \left[\frac{(a-b)(2c+ad)+(a+b)c^2}{2d(a^2-b^2)}\right] - \frac{2c^2+acd}{d^2(a^2-b^2)}$$

$$= \frac{(3ac-bc+a^2d-abd)^2}{4d^2(a^2-b^2)^2} - \frac{2c^2+acd}{d^2(a^2-b^2)}$$

$$= \frac{(3ac-bc+a^2d-abd)^2-(2c^2+acd)(4a^2-4b^2)}{4d^2(a^2-b^2)^2}.$$

Verrichtet man beim Zähler dieſes Bruches die Multiplication wirklich, und zieht aus beiden Theilen der Gleichung die Quadratwurzel, ſo erhält man

$$x - \frac{(a-b)(2c+ad)+(a+b)c}{2d(a^2-b^2)}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{\left\{\begin{matrix}a^4d^2-2a^3bd^2+2a^3cd+a^2c^2+a^2b^2d^2\\ -8a^2bcd-6abc^2+6ab^2cd+9b^2c^2\end{matrix}\right\}}{[2d(a^2-b^2)]^2}}$$

$$= \pm\frac{a^2d-abd+ac-3bc}{2d(a^2-b^2)},^{*)}$$

---

*) Dieſe Quadratwurzel findet man auf dieſelbe Art, wie in der vorigen Aufgabe.

$$\text{folgl. } x = \frac{a^2d-abd+ac-3bc}{2d\,(a^2-b^2)} + \frac{(a-b)(2c+ad)+(a+b)c}{2d\,(a^2-b^2)}$$

$$= \frac{3ac - bc + a^2d - abd + a^2d - abd + ac - 3bc}{2d\,(a^2-b^2)}$$

$$= \frac{4ac - 4bc + 2a^2d - 2abd}{2d\,(a^2-b^2)}$$

$$= \frac{4c\,(a-b) + 2ad\,(a-b)}{2d\,(a^2-b^2)} = \frac{(4c+2ad)\,(a-b)}{2d\,(a^2-b^2)}$$

$$= \frac{2\,(2c+ad)\,(a-b)}{2d\,(a+b)\,(a-b)} = \frac{2c+ad}{d\,(a+b)}$$

$$\text{od. } x = -\frac{a^2d-abd+ac-3bc}{2d\,(a^2-b^2)} + \frac{(a-b)(2c+ad)+(a+b)c}{2d\,(a^2-b^2)}$$

$$= \frac{2ac+2bc}{2d\,(a^2-b^2)} = \frac{2c\,(a+b)}{2d\,(a-b)\,(a+b)}$$

$$= \frac{c}{d\,(a-b)}.$$

31. Gleichung.

$$32a^{2m}c^{n-1} + 4a^{m+3}c^{n-1}(ac^3-2)x = a^7c^{n+2}x^2$$

Auflöſung.

Man ordne die Gleichung und dividire mit dem Coefficienten von x^2, ſo iſt

$$x^2 - \frac{4a^{m+3}c^{n-1}\,(ac^3-2)\,x}{a^7c^{n+2}} = \frac{32a^{2m}c^{n-1}}{a^7c^{n+2}}.$$

Dividirt man die Zähler wirklich durch den Nenner a^7c^{n+2}, indem man nämlich die Exponenten von a und c in dem Nenner, 7 und $n+2$, von den Exponenten derſelben Buchſtaben in dem Zähler, $m+3$, $n-1$, $2m$, $n-1$, abzieht, ſo erhält man

$$x^2 - 4a^{m-4}c^{-3}\,(ac^3-2)\,x = 32a^{2m-7}c^3$$

oder $x^2 - 4a^{m-4}c^{-3}(ac^3 - 2)x + [2a^{m-4}c^{-3}(ac^3 - 2)]^2$

$$= 32a^{2m-7}c^{-3} + [2a^{m-4}c^{-3}(ac^3 - 2)]^2$$

$$= 32a^{2m-7}c^{-3} + (2a^{m-3} - 4a^{m-4}c^{-3})^2$$

$$= 32a^{2m-7}c^{-3} + 4a^{2m-6} - 16a^{2m-7}c^{-3} + 16a^{2m-8}c^{-6}$$

$$= 4a^{2m-6} + 16a^{2m-7}c^{-3} + 16a^{2m-8}c^{-6},$$

alſo $x - 2a^{m-4}c^{-3}(ac^3 - 2)$

$$= \pm \sqrt{(4a^{2m-6} + 16a^{2m-7}c^{-3} + 16a^{2m-8}c^{-6})}$$

$$= \pm (2a^{m-3} + 4a^{m-4}c^{-3}),$$

folgl. $x = 2a^{m-3} + 4a^{m-4}c^{-3} + 2a^{m-3} - 4a^{m-4}c^{-3}$

$$= 4^{m-3}$$

oder $x = -2a^{m-3} - 4a^{m-4}c^{-3} + 2a^{m-3}\,4a^{m-4}c^{-3}$

$$= -8a^{m-4}c^{-3} = -\frac{8a^{m-4}}{c^3}.$$

32. Gleichung.

$$cx + \frac{ac}{a+b} = (a+b)\,x^2.$$

Auflöſung.

Man ordne die Gleichung und dividire ſie durch den Coefficienten von x^2, ſo iſt

$$x^2 - \frac{cx}{a+b} = \frac{ac}{(a+b)^2}$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{cx}{a+b} + \left(\frac{c}{2\,(a+b)}\right)^2$$

$$= \left(\frac{c}{2\,(a+b)}\right)^2 + \frac{ac}{(a+b)^2} = \frac{c^2 + 4ac}{4\,(a+b)^2},$$

alſo $x - \dfrac{c}{2\,(a+b)} = \pm \sqrt{\dfrac{c^2 + 4ac}{4\,(a+b)^2}},$

$$\text{folgl. } x = \frac{c + \sqrt{(c^2 + 4ac)}}{2\,(a + b)}$$

$$\text{oder } x = \frac{c - \sqrt{(c^2 + 4ac)}}{2\,(a + b)}.$$

33. Gleichung.

$$9a^4b^4x^2 - 6a^3b^2x - b^2 = 0.$$

Auflöſung.

Ordnet man die Gleichung, und dividirt ſie durch den Coefficienten von x^2, ſo iſt

$$x^2 - \frac{2x}{3ab^2} = \frac{1}{9a^4b^2},$$

$$\text{und } x^2 - \frac{2x}{3ab^2} + \left(\frac{1}{3ab^2}\right)^2 = \frac{1}{9a^4b^2} + \left(\frac{1}{3ab^2}\right)^2$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{9a^4b^4},$$

$$\text{alſo } x - \frac{1}{3ab^2} = \pm\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{9a^4b^4}},$$

$$\text{folgl. } x = \frac{a + \sqrt{(a^2 + b^2)}}{3a^2b^2}$$

$$\text{oder } x = \frac{a - \sqrt{(a^2 + b^2)}}{3a^2b^2}.$$

34. Gleichung.

$$abx^2 - 2x\,(a + b)\sqrt{ab} = (a - b)^2.$$

Auflöſung.

Ordnet man die Gleichung, und dividirt ſie durch den Coefficienten von x^2, ſo iſt

$$x^2 - \frac{(2(a+b)\sqrt{ab})x}{ab} = \frac{(a - b)^2}{ab},$$

$$\text{und } x^2 - \frac{(2(a+b)\sqrt{ab})\,x}{ab} + \left[\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{ab}\right]^2$$

$$= \frac{(a-b)^2}{ab} + \left[\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{ab}\right]^2$$

$$= \frac{(a^2-2ab+b^2)ab+(a^2+2ab+b^2)ab}{a^2b^2} = \frac{2a^2+2b^2}{ab},$$

$$\text{alſo } x - \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{ab} = \pm\sqrt{\frac{2a^2+2b^6}{ab}},$$

$$\text{folgl. } x = \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{ab\ ^{*)}} \pm \sqrt{\frac{2a^2+2b^2}{ab}}$$

$$= \frac{a+b\pm\sqrt{(2a^2+2b^2)}}{\sqrt{ab}}.$$

35. Gleichung.

$$ax^2 + b^2 + c^2 = a^2 + 2bc + 2\,(b-c)\,x\sqrt{a}.$$

Auflöſung.

Man ordne die Gleichung, ſo iſt

$$ax^2 - 2\,(b-c)\,x\sqrt{a} = a^2 + 2bc - b^2 - c^2.$$

Man dividire mit dem Coefficienten von x^2, ſo iſt

$$x^2 - \frac{2(b-c)\,x\sqrt{a}}{a} = \frac{a^2+2bc-b^2-c^2}{a}$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{2(b-c)\,x}{\sqrt{a}}\ ^{**)} = \frac{a^2+2bc-b^2-c^2}{a}.$$

---

*) Um dieſe Reduction zu erhalten, verwandle man den Nenner ab in $\sqrt{ab}\,.\,\sqrt{ab}$, alsdann iſt

$$\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{ab} = \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}\sqrt{ab}} = \frac{a+b}{\sqrt{ab}}.$$

**) Es iſt $\frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

$$x^2 - \frac{2(b-c)x}{\sqrt{a}} + \frac{(b-c)^2}{a} = \frac{a^2+2bc-b^2-c^2}{a} + \frac{(b-c)^2}{a}$$

$$= \frac{a^2+2bc-b^2-c^2+b^2-2bc+c^2}{a} = \frac{a^2}{a} = a,$$

alſo $x - \frac{b-c}{\sqrt{a}} = \pm \sqrt{a},$

folgl. $x = \frac{b-c}{\sqrt{a}} + \sqrt{a} = \frac{b-c+\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{b-c+a}{\sqrt{a}}$

oder $x = \frac{b-c}{\sqrt{a}} - \sqrt{a} = \frac{b-c-a}{\sqrt{a}}.$

36. Gleichung.

$$cx^2 - 2cx\sqrt{d} = dx^2 - cd.$$

Auflöſung.

Man ordne die Gleichung, ſo iſt

$$(c-d)x^2 - 2cx\sqrt{d} = -cd.$$

Dieſe Gleichung durch den Coefficienten von x^2 dividirt, giebt

$$x^2 - \frac{2cx\sqrt{d}}{c-d} = -\frac{cd}{c-d}$$

oder $x^2 - \frac{2cx\sqrt{d}}{c-d} + \left(\frac{c\sqrt{d}}{c-d}\right)^2 = \left(\frac{c\sqrt{d}}{c-d}\right)^2 - \frac{cd}{c-d}$

$$= \frac{(c\sqrt{d})^2}{(c-d)^2} - \frac{cd}{c-d} = \frac{c^2d-c^2d+cd^2}{(c-d)^2} = \frac{cd^2}{(c-d)^2}.$$

Zieht man aus beiden Theilen der Gleichung die Quadratwurzel, ſo iſt

$$x - \frac{c\sqrt{d}}{c-d} = \pm \frac{\sqrt{cd^2}}{\sqrt{(c-d)^2}} = \pm \frac{d\sqrt{c}}{c-d},$$

folgl. $$x = \frac{c\sqrt{d} + d\sqrt{c}}{c - d} = \frac{\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}\cdot\sqrt{d} + \sqrt{d}\cdot\sqrt{d}\cdot\sqrt{c}}{(\sqrt{c} + \sqrt{d})(\sqrt{c} - \sqrt{d})}\text{*)}$$

$$= \frac{\sqrt{c}\cdot\sqrt{cd} + \sqrt{d}\cdot\sqrt{cd}}{(\sqrt{c} + \sqrt{d})(\sqrt{c} - \sqrt{d})} = \frac{(\sqrt{c} + \sqrt{d})\sqrt{cd}}{(\sqrt{c} + \sqrt{d})(\sqrt{c} - \sqrt{d})}$$

$$= \frac{\sqrt{cd}}{\sqrt{c} - \sqrt{d}}$$

oder $$x = \frac{c\sqrt{d} - d\sqrt{c}}{c - d} = \frac{\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}\cdot\sqrt{d} - \sqrt{d}\cdot\sqrt{d}\cdot\sqrt{c}}{(\sqrt{c} + \sqrt{d})(\sqrt{c} - \sqrt{d})}$$

$$= \frac{\sqrt{c}\cdot\sqrt{cd} - \sqrt{d}\cdot\sqrt{cd}}{(\sqrt{c} + \sqrt{d})(\sqrt{c} - \sqrt{d})} = \frac{(\sqrt{c} - \sqrt{d})\sqrt{cd}}{(\sqrt{c} - \sqrt{d})(\sqrt{c} + \sqrt{d})}$$

$$= \frac{\sqrt{cd}}{\sqrt{c} + \sqrt{d}}.$$

37. Gleichung.

$$(4a^2 - 9cd)x^2 + (4a^2c^2 + 4abd^2)x + (ac^2 + bd^2)^2 = 0.$$

Auflöſung.

Man ordne zuvörderſt die Gleichung, ſo iſt $(4a^2 - 9cd^2)x^2 + (4a^2c^2 + 4abd^2)x = -(ac^2 + bd^2)^2$. Nun ſetze man $4a^2 - 9cd^2 = A$, und $ac^2 + bd^2 = B$**) ſo iſt

---

*) Die Verwandlung des Zählers beruht darauf, daß $c = \sqrt{c}\cdot\sqrt{c}$ und $d = \sqrt{d}\cdot\sqrt{d}$. Was die Verwandlung des Nenners betrifft, ſo gründet ſie ſich auf den bekannten Satz, daß die Differenz zweier Quadrate dem Produkte aus der Summe ihrer Wurzeln in die Differenz derſelben gleich iſt. Da nun die Quadratwurzel von c $\sqrt{c}$ und die Quadratwurzel von d $\sqrt{d}$ iſt, ſo muß auch $c - d = (\sqrt{c} + \sqrt{d})(\sqrt{c} - \sqrt{d})$ ſein.

**) Bevor man zur Auflöſung einer Gleichung ſchreitet, muß man ſich mit der Natur derſelben bekannt machen, und unterſuchen, ob man nicht auf einem kürzern Wege, als auf dem gewöhnlichen zum Reſultat gelangen könne. Die Folge wird lehren, daß man ſehr oft durch ſolche Betrachtungen den weitläuftigſten und ſchwie-

$$Ax^2 + 4aBx\,^{*)} = -B^2$$

$$\text{oder } x^2 + \frac{4aBx}{A} = -\frac{B^2}{A},$$

$$\text{und } x^2 + \frac{4aBx}{A} + \left(\frac{2aB}{A}\right)^2 = -\frac{B^2}{A} + \left(\frac{2aB}{A}\right)^2$$

$$= \frac{-AB^2 + 4a^2B^2}{A^2} = \frac{(4a^2 - A)\,B^2}{A^2},$$

$$\text{alſo } x + \frac{2aB}{A} = \pm\sqrt{\frac{(4a^2 - A)\,B^2}{A^2}} = \frac{\pm B\sqrt{(4a^2 - A)}}{A},$$

$$\text{folgl. } x = \frac{-2aB + B\sqrt{(4a^2 - A)}}{A}$$

$$= \frac{-2aB + B\sqrt{(4a^2 - 4a^2 + 9cd^2)}}{4a^2 - 9cd^2} = \frac{-2aB + B\sqrt{9cd^2}}{4a^2 - 9cd^2}$$

$$= \frac{-B\,(2a - 3d\sqrt{c})}{(2a - 3d\sqrt{c})\,(2a + 3d\sqrt{c})\,^{**)}} = -\frac{B}{2a + 3d\sqrt{c}}$$

$$= -\frac{ac^2 + bd^2}{2a + 3d\sqrt{c}}$$

---

rigſten Rechnungen ausweichen kann. — Es iſt übrigens nicht leicht, unter den vielen Hülfsmitteln und Kunſtgriffen, welche der Calcul in ſchwierigen Fällen darbietet, grade diejenigen zu wählen, die am ſchnellſten zum Ziele führen, und das Reſultat in der geſchmeidigſten Form darſtellen; nur durch ſtetes Nachdenken und Uebung wird man ſich endlich die gehörige Fertigkeit bei Anwendung ſolcher Hülfsmittel verſchaffen. In gegenwärtiger Auflöſung iſt es einleuchtend, daß durch die Einführung der Buchſtaben A und B die Rechnungsoperation äußerſt erleichtert und abgekürzt wird, indem man im Laufe der Rechnung nur mit zwei Buchſtaben zu thun hat, deren Werth erſt beim Schluſſe der Auflöſung realiſirt wird.

*) Denn es iſt

$$(4a^2c^2 + 4abd^2)\,x = 4a\,(ac^2 + bd^2)\,x = 4aBx.$$

**) Siehe Anmerkung zur 36ſten Gleichung.

$$\text{oder } x = \frac{-2aB - B\sqrt{(4a^2 - A)}}{A} = \frac{-2aB - B\sqrt{9cd^2}}{4a^2 - 9cd^2}$$

$$= \frac{-B(2a + 3d\sqrt{c})}{(2a - 3d\sqrt{c})(2a + 3d\sqrt{c})} = -\frac{B}{2a - 3d\sqrt{c}}$$

$$= -\frac{ac^2 + bd^2}{2a - 3d\sqrt{c}}.$$

Um ſich von dem Vortheile, welchen dieſe Auflöſungsart gewährt, zu überzeugen, mag hier die Auflöſung nach der gewöhnlichen Art folgen.

Es iſt

$$(4a^2 - 9cd^2)\,x^2 + (4a^2c^2 + 4abd^2)\,x$$
$$= -(ac^2 + bd^2)^2.$$

Dividirt man mit dem Coefficienten von x^2, ſo erhält man

$$x^2 + \frac{4a^2c^2 + 4abd^2}{4a^2 - 9cd^2}\,x = -\frac{(ac^2 + bd^2)^2}{4a^2 - 9cd^2},$$

$$\text{und } x^2 + \frac{4a^2c^2 + 4abd^2}{4a^2 - 9cd^2}\,x + \left(\frac{2a^2c^2 + 2abd^2}{4a^2 - 9cd^2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2a^2c^2 + 2abd^2}{4a^2 - 9cd^2}\right)^2 - \frac{(ac^2 + bd^2)^2}{4a^2 - 9cd^2}$$

$$= \frac{(2a^2c^2 + 2abd^2)^2 - (ac^2 + bd^2)^2\,(4a^2 - 9cd^2)}{(4a^2 - 9cd^2)^2}$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{l} 4a^4c^4 + 8a^3bc^2d^2 + 4a^2b^2d^4 - 4a^4c^4 - 8a^3bc^2d^2 \\ -\,4a^2b^2d^4 + 9a^2c^5d^2 + 18abc^3d^4 + 9b^2cd^6 \end{array}\right\}}{(4a^2 - 9cd^2)^2}$$

$$= \frac{9a^2c^5d^2 + 18abc^3d^4 + 9b^2cd^6}{(4a^2 - 9cd^2)^2}.$$

Zieht man aus beiden Theilen der Gleichung die Quadratwurzel, ſo iſt

$$x + \frac{2a^2c^2 + 2abd^2}{4a^2 - 9cd^2} = \pm \frac{3ac^2d\sqrt{c} + 3bd^3\sqrt{c}}{4a^2 - 9cd^2},$$

$$\text{folgl. } x = \frac{3ac^2d\sqrt{c} + 3bd^3\sqrt{c} - 2a^2c^2 - 2abd^2}{4a^2 - 9cd^2}$$

$$= \frac{(ac^2 + bd^2)\, 3d\sqrt{c} - (ac^2 + bd^2)\, 2a}{4a^2 - 9cd^2}$$

$$= - \frac{(ac^2 + bd^2)\,(2a - 3d\sqrt{c})}{(2a - 3d\sqrt{c})\,(2a + 3d\sqrt{c})} = - \frac{ac^2 + bd^2}{2a + 3d\sqrt{c}}$$

$$\text{oder } x = - \frac{(ac^2 + bd^2)\, 3d\sqrt{c} + 2a(ac^2 + bd^2)}{4a^2 - 9cd^2}$$

$$= - \frac{(2a + 3d\sqrt{c})\,(ac^2 + bd^2)}{(2a + 3d\sqrt{c})\,(2a - 3d\sqrt{c})} = - \frac{ac^2 + bd^2}{2a - 3d\sqrt{c}}.$$

38. Gleichung.

$$ab^3x^2 + (1 + c)\, bd\sqrt{c} + cb^2x^2$$
$$= [b^3d\sqrt{c} + (ab + c)\,(1 + c)]\, x.$$

Auflöſung.

Man ordne die Gleichung, ſo iſt

$$(ab^2 + cb^2)x^2 - [b^3d\sqrt{c} + (ab + c)\,(1 + c)]x$$
$$= -\,(1 + c)\, bd\sqrt{c}.$$

Nun ſetze man $ab + c = A$, $1 + c = B$, $bd\sqrt{c} = C$, ſo iſt

$$b^2Ax^2 - (b^2C + AB)x = -\,BC$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{(b^2C + AB)x}{b^2A} = - \frac{BC}{b^2A},$$

und $x^2 - \frac{(b^2C+AB)x}{b^2A} + \left(\frac{b^2C+AB}{2b^2A}\right)^2$

$$= \left(\frac{b^2C+AB}{2b^2A}\right)^2 - \frac{BC}{b^2A}$$

$$= \frac{b^4C^2+2b^2ABC+A^2B^2}{4b^4A^2} - \frac{BC}{b^2A}$$

$$= \frac{b^4C^2-2b^2ABC+A^2B^2}{4b^4A^2}.$$

Da man nun aus dieſem Bruch ſehr leicht die Quadratwurzel ausziehen kann, ſo iſt

$$x - \frac{b^2C+AB}{2b^2A} = \pm\frac{b^2C-AB}{2b^2A},$$

folgl. $x = \frac{b^2C-AB+b^2C+AB}{2b^2A} = \frac{2b^2C}{2b^2A} = \frac{C}{A} = \frac{bd\sqrt{c}}{ab+c}$

oder $x = \frac{b^2C+AB-b^2C+AB}{2b^2A} = \frac{2AB}{2b^2A} = \frac{B}{b^2} = \frac{1+c}{b^2}.$

39. Gleichung.

$$\frac{5a+10ab^2}{9b^2-3a^2b^2}x^2 - \left[\frac{5\sqrt{(a+b)}}{3b^3} + \frac{(1+2b^2)\,cd\sqrt{c}}{3-a^2}\right]x + \frac{cd}{ab}\sqrt{c(a+b)} = 0.$$

Auflöſung.*)

Man ordne die Gleichung, ſo erhält man

---

*) Wollte man dieſe Gleichung auf dem gewöhnlichen Wege auflöſen, ſo würde man ſich in eine überaus weitläuftige und ermüdende Rechnung einlaſſen müſſen. Solche verwickelte Rechnungen aber ſind nicht allein höchſt verdrießlich, ſondern auch ſehr zeitraubend, indem man bei der Aufſuchung der begangenen Fehler, welche hier ganz unvermeidlich ſind, ſehr oft mehrere Stunden zubringen,

$$\frac{5a+10ab^2}{9b^2-3a^2b^2}x^2-\left[\frac{5\sqrt{(a+b)}}{3b^3}+\frac{(1+2b^2)\,cd\sqrt{c}}{3-a^2}\right]x$$
$$=-\frac{cd}{ab}\sqrt{c}\,(a+b).$$

Nun ſetze man $1+2b^2=A$, $\sqrt{(a+b)}=B$, $3-a^2=C$, $cd\sqrt{c}=D$, ſo iſt

$$\frac{5aA}{3b^2C}x^2\,{}^{*)}-\left(\frac{5B}{3b^3}+\frac{AD}{C}\right)x=-\frac{DB}{ab}$$

oder $x^2-\dfrac{3b^2C}{5aA}\left(\dfrac{5B}{3b^3}+\dfrac{AD}{C}\right)x=-\dfrac{DB}{ab}\cdot\dfrac{3b^2C}{5aA}$,

$$x^2-\frac{5BC+3b^3AD}{5abA}x=-\frac{3bBCD}{5a^2A},$$

und $x^2-\dfrac{5BC+3b^3AD}{5abA}x+\left(\dfrac{5BC+3b^3AD}{10abA}\right)^2$

$$=\left(\frac{5BC+3b^3AD}{10abA}\right)^2-\frac{3bBCD}{5a^2A}$$
$$=\frac{(5BC+3b^3AD)^2-20b^2A\cdot3bBCD}{100a^2b^2A^2}$$
$$=\frac{25B^2C^2+30b^3ABCD+9b^6A^2D^2-60b^3ABCD}{100a^2b^2A^2}$$
$$=\frac{25B^2C^2-30b^3ABCD+9b^6A^2D^2}{100a^2b^2A^2}.$$

---

und alsdann den beſchwerlichen Weg noch einmal vornehmen muß. Bei der hier gewählten Auflöſungsart hat man alle Schwierigkeiten vermieden, und das Reſultat auf die kürzeſte Weiſe gefunden.

*) denn es iſt

$$\frac{5a+10ab^2}{9b^2-3a^2b^2}x^2=\frac{5a\,(1+2b^2)}{3b^2\,(3-a^2)}x^2=\frac{5aA}{3b^2C}x^2.$$

Zieht man aus beiden Theilen der Gleichung die Quadratwurzel, ſo erhält man

$$x - \frac{5BC + 3b^3AD}{10abA} = \pm \frac{5BC - 3b^3AD}{10abA},$$

$$\text{folgl. } x = \frac{5BC + 3b^3AD + 5BC - 3b^3AD}{10abA} = \frac{10BC}{10abA}$$

$$= \frac{BC}{abA} = \frac{(3 - a^2)\sqrt{(a + b)}}{ab\,(1 + 2b^2)}$$

$$\text{oder } x = \frac{5BC + 3b^3AD - 5BC + 3b^3AD}{10abA} = \frac{6b^3AD}{10abA}$$

$$= \frac{3b^2D}{5a} = \frac{3b^2cd\sqrt{c}}{5a}.$$

40. Gleichung.

$$ax = b + \sqrt{cx}.$$

Auflöſung.

Zuvörderſt ſetze man

$$ax - b = \sqrt{cx}.\text{*)}$$

Man erhebe beide Theile der Gleichung zum Quadrat, ſo iſt

$$a^2x^2 - 2abx + b^2 = cx$$

$$\text{oder } a^2x^2 - (2ab + c)\,x = -\,b^2.$$

Dividirt man ferner mit dem Coefficienten von x^2, ſo erhält man

$$x^2 - \frac{2ab + c}{a^2}\,x = -\,\frac{b^2}{a^2}$$

---

*) Man ſchafft b auf die andere Seite der Gleichung, damit beim nachherigen Quadriren die Gleichung rational werde.

oder $$x^2 - \frac{2ab+c}{a^2}x + \left(\frac{2ab+c}{2a^2}\right)^2 = \left(\frac{2ab+c}{2a^2}\right)^2 - \frac{b^2}{a^2}$$

$$= \frac{(2ab+c)^2 - 4a^2b^2}{4a^4}$$

$$= \frac{4a^2b^2 + 4abc + c^2 - 4a^2b^2}{4a^4} = \frac{4abc + c^2}{4a^4}.$$

Zieht man aus beiden Theilen die Quadratwurzel, ſo iſt

$$x - \frac{2ab+c}{2a^2} = \pm\frac{\sqrt{(4abc+c^2)}}{2a^2},$$

folgl. $$x = \frac{2ab + c + \sqrt{(4abc + c^2)}}{2a^2}.$$

Der andere Werth für x gilt für die Gleichung

$$ax = b - \sqrt{cx}.$$

(Siehe M. H., Sammlung ꝛc. S. 140 Anmerk.)

41. Gleichung.

$$3\sqrt{(112 - 8x)} = 19 + \sqrt{(3x + 7)}.$$

Auflöſung.

Man erhebe beide Theile der Gleichung zum Quadrat, ſo iſt

$$9\cdot112 - 9\cdot8x = 19^2 + 2\cdot19\sqrt{(3x+7)} + 3x + 7$$

oder $$-(9\cdot8x + 3x) + 9\cdot112 - 19^2 - 7$$

$$= 2\cdot19\sqrt{(3x+7)},$$

$$-75x + 640 = 38\sqrt{(3x+7)}.$$

Hierdurch hat man nun eine Wurzelgröße aus der Gleichung weggeſchafft.

Man erhebe abermals beide Theile zum Quadrat, ſo erhält man

$$75^2x^2 - 2 \cdot 75 \cdot 640x + 640^2 = 38^2(3x+7)$$

oder $5625x^2 - 96000x + 409600 = 4332x + 10108$,

alſo $5625x^2 - 100332x = -399492$.

Dieſe Gleichung durch 9 dividirt, giebt

$$625x^2 - 11148x = -44388$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{11148x}{625} = -\frac{44388}{625},$$

$$\text{und } x^2 - \frac{11148x}{625} + \left(\frac{5574}{625}\right)^2 = \left(\frac{5574}{625}\right)^2 - \frac{44388}{625}$$

$$= \frac{5574^2 - 625 \cdot 44388}{625^2} = \frac{3326976}{625^2}.$$

Zieht man aus beiden Theilen der Gleichung die Quadratwurzel, ſo iſt

$$x - \frac{5574}{625} = \pm\frac{1824}{625},$$

$$\text{folgl. } x = \frac{5574 - 1824}{625} = 6.$$

42. Gleichung.

$$\sqrt{(2x+7)} + \sqrt{(3x-18)} = \sqrt{(7x+1)}.$$

Auflöſung.

Erhebt man beide Theile der Gleichung zum Quadrat, ſo iſt

$$2x + 7 + 2\sqrt{(2x+7)(3x-18)} + 3x - 18 = 7x + 1$$

$$\text{oder } 2x + 12 = 2\sqrt{(2x+7)(3x-18)}.$$

Dieſe Gleichung durch 2 dividirt, giebt

$$x + 6 = \sqrt{(2x+7)(3x-18)}.$$

Auf dieſe Art ſind nun zwei irrationale Größen zu gleicher Zeit aus der Gleichung verſchwunden.

Erhebt man abermals beide Theile zum Quadrat, ſo erhält man

$$x^2 + 12x + 36 = (2x + 7)(3x - 18)$$
$$= 6x^2 - 15x - 126$$
$$\text{oder } 5x^2 - 27x = 162,$$
$$\text{alſo } x^2 - \frac{27x}{5} = \frac{162}{5},$$
$$\text{und } x^2 - \frac{57x}{5} + \left(\frac{27}{10}\right)^2 = \left(\frac{27}{10}\right)^2 + \frac{162}{5} = \frac{729 + 3240}{100}$$
$$= \frac{3969}{100}.$$

Zieht man aus beiden Theilen die Quadratwurzel, ſo erhält man

$$x - \frac{27}{10} = \pm\frac{63}{10},$$
$$\text{folgl. } x = \frac{27 + 63}{10} = \frac{90}{10} = 9.$$

43. Gleichung.

$$5\sqrt{(62 + 3x)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(95\tfrac{2}{3} - 5x)} = 41.$$

Auflöſung.

Die Auflöſung dieſer Gleichung, welche mit der 41ſten in Hinſicht der darin vorkommenden Wurzelgrößen völlig gleich iſt, wird eben ſo, wie dort behandelt. Man ſchafft nämlich die eine Wurzelgröße auf die andere Seite, wodurch man

$$5\sqrt{(62 + 3x)} = 41 + \tfrac{1}{2}\sqrt{(95\tfrac{2}{3} - 5x)}$$

erhält. Alsdann erhebt man beide Theile der Gleichung zum Quadrat, welches

$$25\,(62+3x) = 41^2 + \tfrac{1}{4}(95\tfrac{2}{3} - 5x) + 41\,\sqrt{(95\tfrac{2}{3} - 5x)}$$

giebt. Man löſt die Klammern auf, und ſchafft die Brüche weg, ſo erhält man

$$915x - 1859 = 492\,\sqrt{(95\tfrac{2}{3} - 5x)}.$$

Man quadrirt die Gleichung, und ordnet ſie, ſo iſt

$$837225x^2 - 2191650x = 19701575$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{29222}{11163}x = \frac{788063}{11163 \times 3}$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{29222}{11163}x + \left(\frac{14611}{11163}\right)^2 = \frac{788063}{11163 \times 3} + \left(\frac{14611}{11163}\right)^2$$

$$= \frac{788063 \times 11163 + 14611 \times 14611 \times 3}{11163 \times 11163 \times 3}$$

$$= \frac{9437591232}{11163 \times 11163 \times 3} = \frac{3145863744}{11163^2}.$$

Man zieht die Quadratwurzel aus, ſo erhält man

$$x - \frac{14611}{11163} = \frac{56088}{11163},$$

$$\text{folgl. } x = 6\tfrac{1}{3}.$$

44. Gleichung.

$$7\,\sqrt{(\tfrac{3}{2}x - 5)} - \sqrt{\left(\frac{x}{5} + 45\right)} - \tfrac{7}{4}\,\sqrt{(10x + 56)} = 0.$$

Auflöſung.

Um zwei Wurzelgrößen wegzuſchaffen, ordne man zuerſt die Gleichung, ſo iſt

$$7\,\sqrt{(\tfrac{3}{2}x - 5)} = \sqrt{\left(\frac{x}{5} + 45\right)} + \tfrac{7}{4}\,\sqrt{(10x + 56)}.$$

Dieſe Gleichung quadrirt, giebt

$$49\left(\tfrac{3}{2}x - 5\right) = \frac{x}{5} + 45 + \tfrac{7}{2}\sqrt{\left[(10x + 56)\left(\frac{x}{5} + 45\right)\right]}$$
$$+ \frac{49}{16}(10x + 56).$$

Man löſe die Klammern auf, und ſchaffe die Brüche weg, ſo erhält man

$$1707x - 18460 = 140\sqrt{(2x^2 + 461\tfrac{1}{5}x + 2520)}.$$

Man quadrire die Gleichung, um das letzte Wurzelzeichen wegzuſchaffen. Alsdann iſt

$$2874649x^2 - 72061960x = -291379600$$

oder $x^2 - \frac{72061960}{2874649}x = -\frac{837614075760400}{2874649^2}$

oder

$$x^2 - \frac{72061960}{2874649}x + \left(\frac{36030980}{2874649}\right)^2 = \frac{460617444000000}{2874649^2}.$$

Man ziehe die Quadratwurzel aus, ſo erhält man

$$x - \frac{36030980}{2874649} = \frac{21462000}{2874649},$$

folgl. $x = 20.$

45. Gleichung.

$$ax^{2n} + bx^n = c.$$

Auflöſung.

Man dividire mit dem Coefficienten a, ſo iſt

$$x^{2n} + \frac{bx^n}{a} = \frac{c}{a}$$

oder $(x^n)^2 + \frac{bx^n}{a} = \frac{c}{a}.$

Da dieſe Gleichung nun die gewöhnliche Form einer unreinen quadratiſchen Gleichung erhalten hat, ſo läßt ſie ſich auch auf die bekannte Art auflöſen. Es iſt nämlich

$$(x^n)^2 + \frac{bx^n}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \frac{b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$\text{oder } x^n + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 + 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{(b^2 + 4ac)}}{2a},$$

$$\text{alſo } x^n = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 + 4ac)}}{2a},$$

$$\text{folgl. } x = \sqrt[n]{\frac{-b + \sqrt{(b^2 + 4ac)}}{2a}}$$

$$\text{oder } x = \sqrt[n]{\frac{-b - \sqrt{(b^2 + 4ac)}}{2a}}.$$

46. Gleichung.

$$x^4 - 74x^2 = -1225.$$

Auflöſung.

Dieſe Gleichung läßt ſich auf die Form

$$(x^2)^2 - 74x^2 = -1225$$

bringen, und iſt daher nur ein ſpecieller Fall von der vorhergehenden allgemeinen Gleichung. Denn es iſt

$$a = 1,\ n = 2,\ b = -74,\ c = -1225.$$

Subſtituirt man daher dieſe beſtimmten Größen in die allgemeine Formel

$$x = \sqrt[n]{\frac{-b \pm \sqrt{(b^2 + 4ac)}}{2a}},$$

ſo erhält man

$$x = \pm\sqrt{\frac{74+\sqrt{(74^2-4\cdot1225)}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{74+\sqrt{576}}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{(37+12)} = \pm\sqrt{49} = \pm 7$$

oder $x = \pm\sqrt{\frac{74-\sqrt{(74^2-4\cdot1225)}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{74-\sqrt{576}}{2}}$

$$= \pm\sqrt{(37-12)} = \pm\sqrt{25} = \pm 5.$$

47. Gleichung.

$$3x^6 + 42x^3 = 3321.$$

Auflöſung.

In dieſer Gleichung iſt

$$n = 3,\ a = 3,\ b = 42,\ c = 3321.$$

Es iſt daher

$$x = \sqrt[3]{\frac{-42+\sqrt{(42^2+4\cdot3\cdot3321)}}{2\cdot3}} = \sqrt[3]{\frac{+204-42}{6}}$$

$$= \sqrt[3]{(34-7)} = \sqrt[3]{27} = 3$$

oder $x = \sqrt[3]{\frac{-42-\sqrt{(42^2+4\cdot3\cdot3321)}}{2\cdot3}} = \sqrt[3]{\frac{-204-42}{6}}$

$$= \sqrt[3]{(-34-7)} = \sqrt[3]{-41} = -\sqrt[3]{41}.^{*})$$

---

*) denn $\sqrt[3]{-41} = \sqrt[3]{-1}\cdot\sqrt[3]{41} = -1\sqrt[3]{41} = -\sqrt[3]{41}.$

IV.

Auflöſungen der Gleichungen vom zweiten Grade mit mehreren unbekannten Größen.

1. Gleichung.

I. $x^2 + y^2 = a$,

II. $x^2 - y^2 = b$.

Auflöſung.

Addirt man beide Gleichungen, ſo erhält man

$$2x^2 = a + b,$$

$$\text{folgl. } x = \pm\sqrt{\frac{a+b}{2}}.$$

Subtrahirt man (II.) von (I.), ſo iſt

$$2y^2 = a - b,$$

$$\text{folgl. } y = \pm\sqrt{\frac{a-b}{2}}.$$

2. Gleichung.

I. $x + y = a$,

II. $xy = b$.

1. Auflöſung.

Man multiplicire (I.) mit y, ſo iſt

$$xy + y^2 = ay.$$

Hiervon die Gleichung (II.) abgezogen, giebt

$$y^2 = ay - b$$

oder $y^2 - ay = -b$,

und $y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - b = \frac{a^2 - 4b}{4}$,

alſo $y - \frac{a}{2} = \pm \frac{\sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}$,

folgl. $y = \frac{a \pm \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}$,

und $x = a - \frac{a \pm \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2} = \frac{2a - a \mp \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}$

$$= \frac{a \mp \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}.$$

2. Auflöſung.

Da hier die Summe der beiden unbekannten Größen x und y gegeben iſt, ſo kömmt es nur darauf an, ihre Differenz zu finden, weil ſich alsdann aus der Summe und der Differenz die Größen ſelbſt herleiten laſſen. Man erhebe daher beide Theile der Gleichung (I.) zum Quadrat, und multiplicire (II.) mit 4, ſo iſt

$$\text{III.}\quad x^2 + 2xy + y^2 = a^2,$$

$$\text{IV.}\quad 4xy = 4b.$$

Man ſubtrahire (IV.) von (III.), ſo bleibt

$$x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - 4b$$

oder $x - y = \pm \sqrt{(a^2 - 4b)}$.

Addirt man alſo dieſe Gleichung zu (I.), ſo iſt

$$2x = a \pm \sqrt{(a^2 - 4b)},$$

folgl. $x = \frac{a \pm \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}$.

Subtrahirt man ſie von (I.), ſo bleibt

$$2y = a \mp \sqrt{(a^2 - 4b)},$$

folgl. $y = \frac{a \mp \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}$.

3. Gleichung.

I. $x + y = a,$

II. $x^2 + y^2 = b.$

1. Auflöſung.

Aus (I.) erhält man

$$x = a - y.$$

Dieſen Werth von x in (II.) ſubſtituirt, giebt

$$(a - y)^2 + y^2 = b$$

oder $a^2 - 2ay + y^2 + y^2 = b,$

$$2y^2 - 2ay = b - a^2,$$

$$y^2 - ay = \frac{b - a^2}{2},$$

und $y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b - a^2}{2} = \frac{a^2 + 2b - 2a^2}{4}$

$$= \frac{2b - a^2}{4},$$

alſo $y - \frac{a}{2} = \pm \frac{\sqrt{(2b - a^2)}}{2},$

folgl. $y = \frac{a \pm \sqrt{(2b - a^2)}}{2},$

und $x = a - \frac{a \pm \sqrt{(2b - a^2)}}{2} = \frac{2a - a \pm \sqrt{(2b - a^2)}}{2}$

$$= \frac{a \mp \sqrt{(2b - a^2)}}{2}.$$

2. Auflöſung.

Da hier ebenfalls die Summe von x und y bekannt iſt, ſo ſuche man ihre Differenz. Man erhebe nämlich beide Theile der Gleichung (I.) zum Quadrat und multiplicire (II.) mit 2, ſo iſt

$$\text{III.} \quad x^2 + 2xy + y^2 = a^2.$$

$$\text{IV.} \quad 2x^2 + 2y^2 = 2b.$$

Subtrahirt man (III.) von (IV.), ſo bleibt

$$x^2 - 2xy + y^2 = 2b - a^2$$

oder $x - y = \pm \sqrt{(2b - a^2)}$.

Addirt man alſo die Gleichung zu (I.), ſo iſt

$$2x = a \pm \sqrt{(2b - a^2)},$$

folgl. $x = \frac{a \pm \sqrt{(2b - a^2)}}{2}$.

Subtrahirt man ſie von (I.), ſo bleibt

$$2y = a \mp \sqrt{(2b - a^2)},$$

folgl. $y = \frac{a \mp \sqrt{(2b - a^2)}}{2}$.

4. Gleichung.

$$\text{I.} \quad xy = a,$$

$$\text{II.} \quad x^2 + y^2 = b.$$

1. Auflöſung.

Aus (I.) findet man

Staatl. Bibliothek Passau

$$x = \frac{a}{y}.$$

Subſtituirt man dieſen Werth von x in (II.), ſo iſt

$$\frac{a^2}{y^2} + y^2 = b$$

$$\text{oder } a^2 + y^4 = by^2,$$

$$y^4 - by^2 = -a^2,$$

$$\text{und } y^4 - by^2 + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - a^2 = \frac{b^2 - 4a^2}{4},$$

$$\text{alſo } y^2 - \frac{b}{2} = \pm \frac{\sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2}$$

$$\text{oder } y^2 = \frac{b \pm \sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2},$$

$$\text{folgl. } y = \pm\sqrt{\frac{b \pm \sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2}},$$

$$\text{und } x^2 = b - y^2 = b - \frac{b \pm \sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2}$$

$$= \frac{2b - b \mp \sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2} = \frac{b \mp \sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2},$$

$$\text{folgl. } x = \pm\sqrt{\frac{b \mp \sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2}}.$$

2. Auflöſung.

Hier kommt es darauf an, ſowohl die Summe, als auch die Differenz von x und y zu finden. Man multiplicire alſo die Gleichung (I.) mit 2, ſo iſt

$$\text{III. } 2xy = 2a.$$

Man addire dieſe Gleichung zu (II.), ſo erhält man

$$\text{IV. } x^2 + 2xy + y^2 = b + 2a.$$

Man ſubtrahire ſie von (II.), ſo iſt

$$\text{V. } x^2 - 2xy + y^2 = b - 2a.$$

Aus beiden Theilen der Gleichungen (IV.) und (V.) die Quadratwurzel gezogen, giebt

$$\text{VI.}\quad x + y = \pm\sqrt{(b + 2a)},$$
$$\text{VII.}\quad x - y = \pm\sqrt{(b - 2a)}.$$

Addirt man dieſe Gleichungen, ſo iſt

$$2x = \pm\sqrt{(b + 2a)} \pm \sqrt{(b - 2a)},$$

folgl. $x = \dfrac{\pm\sqrt{(b + 2a)} \pm \sqrt{(b - 2a)}}{2}$.

Subtrahirt man (VII.) von (VI.), ſo bleibt

$$2y = \pm\sqrt{(b + 2a)} \mp \sqrt{(b - 2a)},$$

folgl. $y = \dfrac{\pm\sqrt{(b + 2a)} \mp \sqrt{(b - 2a)}}{2}$.

Daß übrigens die hier gefundenen Werthe für x und y denen in der erſten Auflöſung gleich ſind, ergiebt ſich aus dem Folgenden. Es iſt

$$x = \frac{\pm\sqrt{(b + 2a)} \pm \sqrt{(b - 2a)}}{2},$$

alſo $x^2 = \dfrac{b + 2a + b - 2a \pm 2\sqrt{[(b + 2a)(b - 2a)]}}{4}$

$$= \frac{2b \pm 2\sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{4} = \frac{b \pm \sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2},$$

folgl. $x = \pm\sqrt{\dfrac{b \pm \sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2}}$.

Auf eine ähnliche Art verfahre man bei dem Werthe für y.

5. Gleichung.

$$\text{I.}\quad x + y = a,$$
$$\text{II.}\quad x^3 + y^3 = b.$$

Auflöſung.

Aus (I.) ergiebt ſich

$$x = a - y.$$

Dieſen Werth von x in (II.) ſubſtituirt, giebt

$$(a - y)^3 + y^3 = b$$

oder $a^3 - 3a^2y + 3ay^2 - y^3 + y^3 = b,$

$$a^3 - 3a^2y + 3ay^2 = b,$$

$$3ay^2 - 3a^2y = b - a^2$$

$$y^2 - ay = \frac{b - a^3}{3a},$$

und $y \quad ay + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b - a^3}{3a} = \frac{3a^3 + 4b - 4a^3}{12a}$

$$= \frac{4b - a^3}{12a},$$

alſo $y - \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{4b - a^3}{12a}},$

folgl. $y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{4b - a^3}{12a}},$

und $x = a - y = a - \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{4b - a^3}{12a}}$

$$= \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{4b - a^3}{12a}}.$$

6. Gleichung.

I. $2x + 3y = 118,$

II. $5x^2 - 7y^2 = 4333.$

Auflöſung.

Aus (I.) ergiebt ſich

$$x = \frac{118 - 3y}{2} = 59 - \frac{3y}{2}.$$

Subſtituirt man den Werth von x in (II.), ſo iſt

$$5\left(59-\frac{3y}{2}\right)^2 - 7y^2 = 4333$$

oder $17405 - 885y + \frac{45y^2}{4} - 7y^2 = 4333$,

$$\frac{45y^2 - 28y^2 - 3540y}{4} = -13072,$$

$$17y^2 - 3540y = -52288$$

$$y^2 - \frac{3540y}{17} = -\frac{52288}{17},$$

und $y^2 - \frac{3540y}{17} + \left(\frac{1770}{17}\right)^2 = \left(\frac{1770}{17}\right)^2 - \frac{52288}{17}$

$$= \frac{1770^2 - 52288 \cdot 17}{17^2} = \frac{2244004}{17^2},$$

alſo $y - \frac{1770}{17} = \pm \frac{1498}{17}$,

folgl. $y = \frac{1770 + 1498}{17} = \frac{3268}{17} = 192\frac{4}{17}$,

und $x = 59 - \frac{3y}{2} = 59 - \frac{3 \cdot 3268}{2 \cdot 17}$

$$= 59 - \frac{3 \cdot 1634}{17} = \frac{1003 - 4902}{17} = -\frac{3899}{17} = -229\frac{6}{17}$$

oder $y = \frac{1770 - 1498}{17} = \frac{272}{17} = 16$,

und $x = 59 - \frac{3 \cdot 16}{2} = 59 - 24 = 35.$

7. Gleichung.

I. $ax + by = h$,

II. $cx^2 + dy^2 = k$.

Auflöſung.

Aus (I.) ergiebt ſich

$$x = \frac{h - by}{a}.$$

Subſtituirt man dieſen Werth von x in (II.), ſo erhält man

$$c\left(\frac{h - by}{a}\right)^2 + dy^2 = k$$

oder $ch^2 - 2bchy + b^2cy^2 + a^2dy^2 = a^2k$,

$$(a^2d + b^2c)y^2 - 2bchy = a^2k - ch^2,$$

$$y^2 - \frac{2bch}{a^2d + b^2c}y = \frac{a^2k - ch^2}{a^2d + b^2c},$$

$$y^2 - \frac{2bch}{a^2d+b^2c}y + \left(\frac{bch}{a^2d+b^2c}\right)^2 = \left(\frac{bch}{a^2d+b^2c}\right)^2 + \frac{a^2k-ch^2}{a^2d+b^2c}$$

$$= \frac{a^2(a^2dk-cdh^2+b^2ck)}{(a^2d + b^2c)^2},$$

alſo $y - \dfrac{bch}{a^2d + b^2c} = \pm \dfrac{a\sqrt{(a^2dk - cdh^2 + b^2ck)}}{a^2d + b^2c}$,

folgl. $y = \dfrac{bch \pm a\sqrt{(a^2dk - cdh^2 + b^2ck)}}{a^2d + b^2c}$.

Auf eine ähnliche Art findet man

$$x = \frac{adh \mp b\sqrt{(a^2dk - cdh^2 + b^2ck)}}{a^2d + b^2c}.$$

8. Gleichung.

I. $x^2 - y^2 = h$,

II. $(x + y + a)^2 + (x - y + a)^2 = k$.

Auflöſung.

Man verwandle die Gleichung (II.) in

$$2x^2 + 2y^2 + 4ax + 2a^2 = k$$

$$\text{oder } x^2 + y^2 + 2ax + a^2 = \frac{k}{2}.$$

Hierzu addire man (I.), ſo ergiebt ſich

$$2x^2 + 2ax + a^2 = \frac{2h + k}{2}$$

$$\text{oder } x^2 + ax = \frac{2h + k - 2a^2}{4},$$

$$\text{und } x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3h + k - 2a^2}{4} = \frac{2h + k - a^2}{4}$$

$$x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{2h + k - a^2}{4}} = \frac{\pm\sqrt{(2h + k - a^2)}}{2},$$

$$\text{folgl. } x = \frac{-a \pm (2h + k - a^2)}{2}.$$

Ferner findet man aus (I.)

$$y^2 = x^2 - h.$$

Subſtituirt man in dieſer Gleichung den für x gefundenen Werth, ſo erhält man

$$y^2 = \frac{a^2 \mp 2a\sqrt{(2h + k - a^2)} + 2h + k - a^2 - 4h}{4}$$

$$= \frac{\mp 2a\sqrt{(2h + k - a^2)} + k - 2h}{4},$$

$$\text{folgl. } y = \pm\sqrt{\frac{\frac{1}{2}k - h \pm a\sqrt{(2h + k - a^2)}}{2}}.$$

9. Gleichung.

$$\text{I. } \frac{18x}{y} = \frac{8y}{x},$$

$$\text{II. } 3xy + 2x + y = 485.$$

Auflöſung.

Man verwandle die Gleichung (I.) in

$$18x^2 = 8y^2$$

$$\text{oder } 9x^2 = 4y^2,$$

und ziehe aus beiden Theilen dieſer Gleichung die Quadratwurzel, ſo iſt

$$3x = \pm\, 2y$$

$$\text{oder III. } x = \pm\,\frac{2y}{3}.$$

Dieſen Werth von x in (II.) ſubſtituirt, giebt

$$3\cdot\frac{2y}{3}\cdot y + 2\cdot\frac{2y}{3} + y = 485$$

$$\text{oder } 2y^2 + \frac{7y}{3} = 485,$$

$$y^2 + \frac{7y}{6} = \frac{485}{2},$$

$$\text{und } y^2 + \frac{7y}{6} + \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \left(\frac{7}{12}\right)^2 + \frac{485}{2} = \frac{34694}{12^2},$$

$$\text{alſo } y + \frac{7}{12} = \pm\,\frac{187}{12}$$

$$\text{folgl. } y = \frac{187-7}{12} = \frac{180}{12} = 15,$$

$$\text{und } x = \frac{2y}{3} = \frac{2\cdot 15}{3} = 10,$$

$$\text{oder } y = \frac{-187-7}{12} = -\,\frac{194}{12} = -\,16\tfrac{1}{6},$$

$$\text{und } x = \frac{2y}{3} = \frac{2\cdot -16\frac{1}{6}}{3} = -\,\frac{194}{18} = -\,10\tfrac{7}{9}.$$

---

*) Setzt man in (III.) $x = -\,\frac{2y}{3}$ ſtatt $x = \frac{2y}{3}$, ſo er-

10. Gleichung.

$$\text{I.}\quad \frac{ax}{y} = \frac{by}{x},$$

$$\text{II.}\quad cxy + dx + ey = h.$$

Auflöſung.

Man verwandle die Gleichung (I.) in

$$ax^2 = by^2,$$

$$\text{folgl. III.}\quad x = \pm\, y\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Dieſen Werth von x ſubſtituire man in (II.), ſo iſt

$$cy^2\sqrt{\frac{b}{a}} + dy\sqrt{\frac{b}{a}} + ey = h$$

$$\text{oder } y^2 + \frac{\left(d\sqrt{\frac{b}{a}} + e\right)y}{c\sqrt{\frac{b}{a}}} = \frac{h}{c\sqrt{\frac{b}{a}}},$$

$$y^2 + \frac{\left(d\sqrt{\frac{b}{a}} + e\right)y}{c\sqrt{\frac{b}{a}}} + \left\{\frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e}{2c\sqrt{\frac{b}{a}}}\right\}^2 = \frac{h}{c\sqrt{\frac{b}{a}}} + \left\{\frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e}{2c\sqrt{\frac{b}{a}}}\right\}^2$$

$$= \frac{\frac{d^2b}{a} + e^2 + 2de\sqrt{\frac{b}{a}} + 4ch\sqrt{\frac{b}{a}}}{\frac{4c^2b}{a}}.$$

Verwandelt man den Zähler dieſes Bruchs in einen Bruch, deſſen gemeinſchaftlicher Nenner a iſt, und

---

hält man noch folgende zwei Paar Gleichungen für x und y, nämlich

$$x\ \frac{1 \pm \sqrt{-34919}}{18};\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{-34919}}{12}.$$

hebt dieſes a gegen das im Nenner befindliche a, ſo erhält man

$$\frac{d^2b + ae^2 + 2de\sqrt{ab}\,^{*)} + 4ch\sqrt{ab}}{4c^2b},$$

alſo

$$y + \frac{e\sqrt{a} + d\sqrt{b}}{2c\sqrt{b}}\,^{**)} = \frac{\pm\sqrt{[(e\sqrt{a} + d\sqrt{b})^2\,^{***)} + 4ch\sqrt{ab}]}}{2c\sqrt{b}},$$

$$\text{folgl. } y = \frac{-(e\sqrt{a} + d\sqrt{b}) \pm \sqrt{[(e\sqrt{a} + d\sqrt{b})^2 + 4ch\sqrt{ab}]}}{2c\sqrt{b}}.$$

Subſtituirt man dieſen Werth von y in (III.), ſo erhält man

$$x = \frac{-(e\sqrt{a} + d\sqrt{b}) \pm \sqrt{[(e\sqrt{a} + d\sqrt{b})^2 + 4ch\sqrt{ab}]}}{2c\sqrt{a}}\,^{****)}.$$

Nimmt man in (III.) $x = -y\sqrt{\frac{b}{a}}$ ſtatt $x = y\sqrt{\frac{b}{a}}$, ſo

---

*) denn $2de\sqrt{\frac{b}{a}} = 2de\sqrt{\frac{ab}{a^2}} = \frac{2de\sqrt{ab}}{a}$.

**) Es iſt $\frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e}{2c\sqrt{\frac{b}{a}}} = \frac{\frac{d\sqrt{ab} + ae}{a}}{\frac{2c\sqrt{ab}}{a}} = \frac{d\sqrt{ab} + ae}{2c\sqrt{ab}}$, und multiplicirt man Zähler und Nenner mit $\sqrt{a}$, ſo iſt

$$\frac{d\sqrt{ab} + ae}{2c\sqrt{ab}} = \frac{ad\sqrt{b} + ae\sqrt{a}}{2ac\sqrt{b}} = \frac{d\sqrt{b} + e\sqrt{a}}{2c\sqrt{b}}.$$

***) weil $(e\sqrt{a} + d\sqrt{b})^2 = ae^2 + bd^2 + 2de\sqrt{ab}$.

****) $\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}}{2c\sqrt{b}} = \frac{\frac{\sqrt{ab}}{a}}{2c\sqrt{b}}$, multiplicirt man Zähler und Nenner mit $a = \sqrt{a}\sqrt{a}$, ſo iſt

$$\frac{\frac{\sqrt{ab}}{a}}{2c\sqrt{b}} = \frac{\frac{a\sqrt{ab}}{a}}{2c\sqrt{a}\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{2c\sqrt{a}\sqrt{ab}} = \frac{1}{2c\sqrt{a}}.$$

erhält man noch zwei Paar Gleichungen für x und y, nämlich:

$$x = \frac{-(e\sqrt{a} - d\sqrt{b}) \pm \sqrt{[(e\sqrt{a} - d\sqrt{b})^2 - 4ch\sqrt{ab}]}}{2c\sqrt{a}},$$

$$y = \frac{+(e\sqrt{a} - d\sqrt{b}) \pm \sqrt{[(e\sqrt{a} - d\sqrt{b})^2 - 4ch\sqrt{ab}]}}{2c\sqrt{b}}.$$

11. Gleichung.

$$\text{I.}\quad x + y + x^2 + y^2 = a,$$

$$\text{II.}\quad x - y + x^2 - y^2 = b.$$

Auflöſung.

Man addire beide Gleichungen, ſo iſt

$$2x^2 + 2x = a + b$$

$$\text{oder}\ x^2 + x = \frac{a+b}{2},$$

$$\text{und}\ x^2 + x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{a+b}{2} = \frac{1 + 2a + 2b}{4},$$

$$\text{alſo}\ x + \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{(2a + 2b + 1)}}{2},$$

$$\text{folgl.}\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{(2a + 2b + 1)}}{2}.$$

Zieht man (II.) von (I.) ab, ſo erhält man auf eine ähnliche Art

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{(2a - 2b + 1)}}{2}.$$

12. Gleichung.

$$\text{I.}\quad x + y = xy,$$

$$\text{II.}\quad x + y + x^2 + y^2 = a.$$

Auflöſung.

Man ſetze $x + y = xy = t$, ſo iſt aus (II.)

$$t + x^2 + y^2 = a.$$

Man muß nun verſuchen, ob ſich nicht auch $x^2 + y^2$ durch t ausdrücken laſſe. Nun iſt aber $t^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 + 2t$. Es iſt daher

$$x^2 + y^2 = t^2 - 2t,$$

und alſo $t + t^2 - 2t = a$

oder $t^2 - t = a$,

und $t^2 - t + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + a = \frac{1 + 4a}{4}$,

alſo $t - \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{(1 + 4a)}}{2}$,

folgl. $t = \frac{1 \pm \sqrt{(1 + 4a)}}{2} = x + y = xy$.

Man hat alſo hier für t, nämlich ſowohl für das Produkt, als für die Summe von x und y, einen Werth in bekannten Größen ausgedrückt gefunden. Nun ſind in der Auflöſung zur zweiten Aufgabe dieſes Abſchnittes für die Werthe zweier Größen, deren Summe und Produkt gegeben ſind, folgende Ausdrücke

$x = \frac{a \pm \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}$ und $y = \frac{a \mp \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}$

gefunden worden. Man braucht alſo nur in dieſen Formeln den für t gefundenen Werth $\frac{1 \pm \sqrt{(1 + 4a)}}{2}$ ſtatt a und b zu ſubſtituiren.

Es iſt demnach

$$x = \frac{\frac{1 \pm \sqrt{(1+4a)}}{2} \pm \sqrt{\left(\left[\frac{1 \pm \sqrt{(1+4a)}}{2}\right)^2 - \frac{4 \pm 4\sqrt{(1+4a)}}{2}\right]}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{(1+4a)} \pm \sqrt{[1+1+4a \pm 2\sqrt{(1+4a)} - 8 \mp 8\sqrt{(1+4a)}]}}{4}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{(1+4a)} \pm \sqrt{[4a - 6 \mp 6\sqrt{(1+4a)}]}}{4},$$

und $y = \frac{1 \pm \sqrt{(1+4a)} \pm \sqrt{[4a - 6 \mp 6\sqrt{(1+4a)}]}}{4}$.

13. Gleichung.

I. $ax - by = g$,

II. $a^3x^3 - b^3y^3 = hxy$.

Auflöſung.

Aus (I.) ergiebt ſich

$$x = \frac{g + by}{a}.$$

Dieſen Werth für x in (II.) ſubſtituirt, giebt

$$(g + by)^3 - b^3y^3 = \frac{ghy + bhy^2}{a}$$

oder $ag^3 + 3abg^2y + 3ab^2gy^2 + ab^3y^3 - ab^3y^3$

$$= ghy + bhy^2,$$

$$(3ab^2g - bh)\,y^2 + (3abg^2 - gh)\,y = -ag^3,$$

alſo $y^2 + \frac{3abg^2 - gh}{3ab^2g - bh}y = \frac{-ag^3}{3ab^2g - bh}$,

$$y^2 + \frac{(3abg - h)g}{(3abg - h)b}y = \frac{-ag^3}{3ab^2g - bh},$$

$$y^2 + \frac{gy}{b} = \frac{-ag^3}{3ab^2g - bh},$$

$$\text{und } y^2 + \frac{gy}{b} + \frac{g^2}{4b^2} = \frac{g^2}{4b^2} - \frac{ag^3}{(3abg - h)b}$$

$$= \frac{3abg^3 - g^2h - 4abg^3}{4b^2(3abg - h)} = \frac{-g^2h - abg^3}{4b^2(3abg - h)}$$

$$= \frac{g^2(h + abg)}{4b^2(h - 3abg)}.$$

Zieht man die Quadratwurzel aus beiden Theilen, ſo iſt

$$y + \frac{g}{2b} = \pm\sqrt{\frac{g^2}{4b^2} \cdot \frac{h + abg}{h - 3abg}} = \pm\frac{g}{2b}\sqrt{\frac{h + abg}{h - 3abg}},$$

$$\text{folgl. } y = -\frac{g}{2b} \pm \frac{g}{3b}\sqrt{\frac{h + abg}{h - 3abg}}$$

$$= \frac{g}{2b}\left(-1 \pm \sqrt{\frac{h + abg}{h - 3abg}}\right),$$

$$\text{und } x = \frac{g + by}{a} = \frac{g}{a} + \frac{b}{a} \cdot \frac{g}{2b}\left(-1 \pm \sqrt{\frac{h + abg}{h - 3abg}}\right)$$

$$= \frac{2g}{2a} - \frac{g}{2a} \pm \frac{g}{2a}\sqrt{\frac{h + abg}{h - 3abg}} = \frac{g}{2a} \pm \frac{g}{2a}\sqrt{\frac{h + abg}{h - 3abg}}$$

$$= \frac{g}{2a}\left(1 \pm \sqrt{\frac{h + abg}{h - 3abg}}\right).$$

14. Gleichung.

I. $(x - y)(x^2 - y^2) = a,$

II. $(x + y)(x^2 + y^2) = b.$

Auflöſung.

Man verwandle zuvörderſt die Gleichung (I.) in

III. $(x - y)^2(x + y) = a,$ *)

---

*) denn es iſt

$$(x - y)(x^2 - y^2) = (x - y)(x - y)(x + y)$$
$$= (x - y)^2(x + y).$$

und ſetze $x + y = t$, $xy = z$, ſo iſt

$$x^2 + 2xy + y^2 = t^2$$

oder $x^2 + 2z + y^2 = t^2$,

folgl. $x^2 + y^2 = t^2 - 2z$.

Subtrahirt man von beiden Theilen dieſer Gleichung $2xy = 2z$, ſo bleibt

$$x^2 - 2xy + y^2 = t^2 - 2z - 2z = t^2 - 4z,$$

folgl. $(x - y)^2 = t^2 - 4z$.

Subſtituirt man nun den Werth von $(x - y)^2$ in (III.), und den von $x^2 + y^2$ in (II.), ſo iſt

$$\text{IV.}\quad (t^2 - 4z)\, t = a,$$

$$\text{V.}\quad (t^2 - 2z)\, t = b.$$

Hier hat man alſo zwei Gleichungen, woraus ſich die unbekannten Größen t und z auf folgende Art beſtimmen laſſen. Man ſubtrahire (IV.) von (V.), ſo bleibt

$$2tz = b - a,$$

folgl. $t = \dfrac{b - a}{2z}$.

Man ſubſtituire dieſen Werth für t in (V.), ſo iſt

$$\left[\frac{(b - a)^2}{4z^2} - 2z\right]\frac{b - a}{2z} = b$$

oder $\dfrac{(b - a)^3}{8z^3} - (b - a) = b$,

$$\frac{(b - a)^3}{8z^3} = 2b - a,$$

$$8z^3 = \frac{(b - a)^3}{2b - a}.$$

Man ziehe aus beiden Theilen die Kubikwurzel, ſo iſt

$$2z = \frac{b-a}{\sqrt[3]{(2b-a)}},$$

$$\text{folgl. } z = \frac{b-a}{2\sqrt[3]{(2b-a)}}.$$

Mithin $t = \frac{b-a}{2z} = b-a : \frac{b-a}{\sqrt[3]{(2b-a)}}$

$$= \frac{(b-a)\sqrt[3]{(2b-a)}}{b-a} = \sqrt[3]{(2b-a)}.$$

Da man nun den Werth für die Summe und das Produkt von x und y gefunden hat, ſo ſubſtituire man, wie in der zwölften Gleichung, in die Formeln

$$x = \frac{a \pm \sqrt{(a^2-4b)}}{2} \text{ und } y = \frac{a \mp \sqrt{(a^2-4b)}}{2}$$

den Ausdruck $\sqrt[3]{(2b-a)}$ ſtatt a und $\frac{b-a}{2\sqrt[3]{(2b-a)}}$ ſtatt b, ſo erhält man

$$x = \frac{\sqrt[3]{(2b-a)} \pm \sqrt{\left[\sqrt[3]{(2b-a)^2} - \frac{2(b-a)}{\sqrt[3]{(2b-a)}}\right]}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(2b-a)} \pm \sqrt{\left[\frac{\sqrt[3]{(2b-a)^3} - 2b + 2a}{\sqrt[3]{(2b-a)}}\right]}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(2b-a)} \pm \sqrt{\frac{a}{\sqrt[3]{(2b-a)}}}}{2} = \frac{\sqrt[3]{(2b-a)} \pm \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[6]{(2b-a)}}}{2} \text{*)}$$

$$= \frac{(2b-a)^{\frac{1}{3}}\,(2b-a)^{\frac{1}{6}} \pm \sqrt{a}}{2\sqrt[6]{(2b-a)}} = \frac{(2b-a)^{\frac{1}{2}} \pm \sqrt{a}}{2\sqrt[6]{(2b-a)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(2b-a)} \pm \sqrt{a}}{2\sqrt[6]{(2b-a)}}.$$

Auf eine ähnliche Art findet man

$$y = \frac{\sqrt{(2b-a)} \mp \sqrt{a}}{2\sqrt[6]{(2b-a)}}.$$

15. Gleichung.

I. $x^2 + y^2 + z^2 = a$,

II. $y^2 = 2xz + b$,

III. $cx = dz$.

Auflöſung.

Man verwandle (III.) in

IV. $cx - dz = 0$.

Ferner ſubſtituire man in (I.) ſtatt y^2 den ihm gleichen Werth $2xz + b$ aus (II.), ſo iſt

$$x^2 + 2xz + z^2 = a - b$$

oder V. $x + z = \sqrt{(a-b)}$.

Dieſe Gleichung multiplicire man mit c, ſo erhält man

$$cx + cx = c\sqrt{(a-b)}.$$

---

*) denn es iſt

$$\sqrt{\frac{a}{\sqrt[3]{(2b-a)}}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\sqrt[3]{(2b-a)}}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[6]{(2b-a)}}.$$

Hiervon (III.) abgezogen, bleibt

$$(c+d)\,z = c\,\sqrt{(a-b)},$$

$$\text{folgl. } z = \frac{c\sqrt{(a-b)}}{c+d}.$$

Multiplicirt man (V.) mit d und addirt (IV.) hinzu, ſo erhält man

$$x = \frac{d\sqrt{(a-b)}}{c+d}.$$

Subſtituirt man endlich die Werthe von x und z in (II.), ſo iſt

$$y^2 = \frac{2cd\,(a-b)}{c^2+2cd+d^2} + b$$

$$= \frac{2acd - 2bcd + 2bcd + b\,(c^2+d^2)}{c^2+2cd+d^2},$$

$$\text{folgl. } y = \sqrt{\frac{2acd+b(c^2+d^2)}{c^2+2cd+d^2}} = \frac{\sqrt{[2acd+b(c^2+d^2)]}}{c+d}.$$

16. Gleichung.

$$x\,(y+z) = a,$$

$$y\,(x+z) = b,$$

$$z\,(x+y) = c.$$

Auflöſung.

Man verwandle zuvörderſt die gegebenen Gleichungen in

$$\text{I. } xy + xz = a,$$

$$\text{II. } xy + yz = b,$$

$$\text{III. } xz + yz = c.$$

Man ſubtrahire (II.) von (I.), ſo bleibt

$$\text{IV. } xz - yz = a - b,$$

(IV.) zu (III.) addirt, giebt

$$xz = \frac{a - b + c}{2},$$

(IV.) von (III.) ſubtrahirt, giebt

$$yz = \frac{c - a + b}{2}.$$

Subtrahirt man (III.) von (II.), ſo iſt

$$xy - xz = b - c.$$

Dieſe Gleichung zu (I.) addirt, giebt

$$xy = \frac{a + b - c}{2}.$$

Setzt man nun zur Abkürzung $a - b + c = A$, $c - a + b = B$, $a + b - c = C$, ſo iſt

$$\text{V. } xz = \frac{A}{2},$$

$$\text{VI. } yz = \frac{B}{2},$$

$$\text{VII. } xy = \frac{C}{2}.$$

Man multiplicire dieſe drei Gleichungen mit einander, ſo erhält man

$$x^2y^2z^2 = \frac{ABC}{8}$$

oder $\text{VIII. } xyz = \pm \sqrt{\frac{ABC}{8}}.$

Dividirt man (VIII.) durch (V.), ſo findet man unmittelbar

$$y = \frac{\pm\sqrt{\frac{ABC}{8}}}{\frac{A}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{ABC}{8}}{\frac{A^2}{4}}} = \pm\sqrt{\frac{BC}{2A}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{(c-a+b)(a+b-c)}{2(a-b+c)}}.$$

Dividirt man (VIII.) durch (VI.), ſo iſt

$$x = \frac{\pm\sqrt{\frac{ABC}{8}}}{\frac{B}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{ABC}{8}}{\frac{B^2}{4}}} = \pm\sqrt{\frac{AC}{2B}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2(c-a+b)}}.$$

Dividirt man endlich (VIII.) durch (VII.), ſo iſt

$$z = \frac{\pm\sqrt{\frac{ABC}{8}}}{\frac{C}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{ABC}{8}}{\frac{C^2}{4}}} = \pm\sqrt{\frac{AB}{2C}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{(a-b+c)(c-a+b)}{2(a+b-c)}}.$$

17. Gleichung.

$$\frac{xyz}{x+y} = a,$$

$$\frac{xyz}{y+z} = b,$$

$$\frac{xyz}{x+z} = c.$$

Auflöſung.

Man verwandle dieſe Gleichungen in

$$\frac{x+y}{xyz}=\frac{1}{a},\text{*)}$$

$$\frac{y+z}{xyz}=\frac{1}{b},$$

$$\frac{x+z}{xyz}=\frac{1}{c}$$

oder in

$$\text{I.}\quad \frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=\frac{1}{a},$$

$$\text{II.}\quad \frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{b},$$

$$\text{III.}\quad \frac{1}{yz}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{c}.$$

Man ſubtrahire (II.) von (I.), ſo bleibt

$$\text{IV.}\quad \frac{1}{yz}-\frac{1}{xy}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b},$$

(IV.) zu (III.) addirt, giebt

$$\frac{2}{yz}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc-ac+ab}{abc}$$

$$\text{oder } yz=\frac{2abc}{bc-ac+ab},$$

(IV.) von (III.) ſubtrahirt, giebt

$$\frac{2}{xy}=\frac{1}{c}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{ab-bc+ac}{abc}$$

$$\text{oder } xy=\frac{2abc}{ab-bc+ac}.$$

Subtrahirt man (III.) von (II.), ſo iſt

$$\frac{1}{xz}-\frac{1}{yz}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}.$$

---

*) Siehe Anmerk. zur 38. Gleichung des II. Abſchnitts.

Dieſe Gleichung zu (I.) addirt, giebt

$$\frac{2}{xz} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{bc + ac - ab}{abc}$$

$$\text{oder } xz = \frac{2abc}{bc + ac - ab}.$$

Setzt man wieder zur Abkürzung $bc - ac + ab = A$, $ab - bc + ac = B$, $bc + ac - ab = C$, ſo iſt

$$\text{V.} \quad yz = \frac{2abc}{A},$$

$$\text{VI.} \quad xy = \frac{2abc}{B},$$

$$\text{VII.} \quad xz = \frac{2abc}{C}.$$

Man multiplicire dieſe drei Gleichungen mit einander, ſo erhält man

$$x^2y^2z^2 = \frac{8\,(abc)^3}{ABC}$$

$$\text{oder VIII.} \quad xyz = \pm\sqrt{\frac{8\,(abc)^3}{ABC}}.$$

Dividirt man (VIII.) durch (V.) ſo erhält man unmittelbar

$$x = \frac{\pm\sqrt{\frac{8\,(abc)^3}{ABC}}}{\frac{2abc}{A}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{8\,(abc)^3}{ABC}}{\frac{4(abc)^2}{A^2}}} = \pm\sqrt{\frac{8(abc)^3A^2}{4(abc)^2ABC}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2abcA}{BC}} = \pm\sqrt{\frac{2abc\,(bc - ac + ab)}{(ab - bc + ac)(bc + ac - ab)}}.$$

Auf eine ähnliche Art erhält man, wenn man (VIII.) ſucceſſive durch (VII.) und (VI.) dividirt,

$$y = \pm \sqrt{\frac{2abc\,(bc + ac - ab)}{(ab + ac - bc)\,(ab - ac + bc)}},$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{2abc\,(ab + ac - bc)}{(ab - ac + bc)\,(bc + ac - ab)}}.$$

18. Gleichung.

I. $xy = p$,

II. $(b - y)\,z = p'$,

III. $(a - x)\,(c - z) = p''$.

Auflöſung.

Aus (I.) erhält man

$$x = \frac{p}{y},$$

und aus (II.)

$$z = \frac{p'}{b - y}.$$

Setzt man dieſe gefundenen Werthe von x und z in (III.), nachdem man dieſe Gleichung, wie gewöhnlich, geordnet, ſo ergiebt ſich

$$\frac{cp}{y} + \frac{ap'}{b - y} - \frac{pp'}{y\,(b - y)} = ac - p''$$

oder $cp\,(b - y) + ap'y - pp' = (ac - p'')\,y\,(b - y)$,

$(p'' - ac)\,y^2 + (abc - bp'' + cp - ap')\,y = bcp - pp'$.

Setzt man nun $abc - bp'' + cp - ap' = A$, ſo iſt

$$y^2 + \frac{A}{p'' - ac}\,y = \frac{bcp - pp'}{p'' - ac},$$

folgl. $y = \dfrac{-A \pm \sqrt{[A^2 - 4p\,(p' - bc)\,(p'' - ac)]}}{2(p'' - ac)}$.

Setzt man ferner $-abc + bp'' - cp + ap' = B$, ſo findet man

$$x = \frac{-A \pm \sqrt{[A^2 - 4p(p' - bc)(p'' - ac)]}}{2(p' - bc)},$$

$$z = \frac{-B \pm \sqrt{[B^2 - 4p(p' - bc)(p'' - ac)]}}{2(p - ab)}.$$

Die in der Beiſpielſammlung enthaltene 19te und 20ſte Gleichung bieten bei der Auflöſung keine Schwierigkeiten dar, und ſind daher hier zur Erſparung des Raumes weggelaſſen worden.

V.

Auflöſung der Gleichungen von höheren Graden.

A. Durch die Cardaniſche Formel.

1. Gleichung.

$$x^2 - 3x - 2 = 0.$$

Auflöſung.

Jede kubiſche Gleichung, welche durch die Cardaniſche Formel aufgelöſt werden ſoll, muß zuvörderſt auf die Form $x^3 = Px + Q$ gebracht werden. Es iſt demnach hier

$$x^3 = 3x + 2.$$

Da nun hier $P = 3$, $Q = 2$, ſo findet man, wenn in der Cardaniſchen Formel 3 ſtatt P und 2 ſtatt Q ſubſtituirt wird,

$$x = \sqrt[3]{\frac{2 + \sqrt{\left(2^2 - \frac{4 \cdot 3^3}{27}\right)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2 - \sqrt{\left(2^2 - \frac{4 \cdot 3^3}{27}\right)}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} = 2.$$

2. Gleichung.

$$x^3 + 12x + 63 = 0.$$

Auflöſung.

Hier iſt

$$x^3 = -12x - 63,$$

$$\text{folgl. } P = -12,\ Q = -63,$$

$$\text{alſo } x = \sqrt[3]{\frac{-63 + \sqrt{\left[(-63)^2 - \frac{4\cdot(-12)^3}{27}\right]}}{2}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{-63 - \sqrt{\left[(-63)^2 - \frac{4\cdot(-12)^3}{27}\right]}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-63 + 65}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-63 - 65}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{-64} = 1 - 4 = -3.$$

3. Gleichung.

$$x^3 - 21x + 344 = 0.$$

Auflöſung.

Hier iſt

$$x^3 = 21x - 344,$$

$$\text{folgl. iſt } P = 21,\ Q = -344,$$

$$\text{und alſo } x = \sqrt[3]{\frac{-344 + \sqrt{\left[(-344)^2 - \frac{4\cdot 21^3}{27}\right]}}{2}},$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{-344 - \sqrt{\left[(-344)^2 - \frac{4\cdot 21^3}{27}\right]}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-344 + 342}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-344 - 342}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-343} = -1 + (-7) = -8.$$

4. Gleichung.

$$x^2 - 6x - 40 = 0.$$

Auflöſung.

Es iſt

$$x^3 = 6x + 40,$$

folgl. $P = 6,\ Q = 40,$

und alſo $x = \sqrt[3]{\dfrac{40 + \sqrt{\left(40^2 - \dfrac{4\cdot6^3}{27}\right)}}{2}}$

$$+ \sqrt[3]{\dfrac{40 - \sqrt{\left(40^2 - \dfrac{4\cdot6^3}{27}\right)}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{40}{2} + \sqrt{\frac{1568}{4}}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{40}{2} - \sqrt{\frac{1568}{4}}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{(20 + \sqrt{392})} + \sqrt[3]{(20 - \sqrt{392})}$$

$$= \sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3}\;{}^{*)} = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4.$$

---

*) Von der Richtigkeit dieſer Verwandlung überzeugt man ſich, ſobald man $2 + \sqrt{2}$ wirklich zum Cubus erhebt; denn man erhält alsdann

$$2^3 + 3\,.\,2^2\,\sqrt{2} + 3\cdot2\,(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3$$
$$= 8 + 12\,\sqrt{2} + 12 + 2\,\sqrt{2} = 20 + 14\,\sqrt{2}$$
$$= 20 + \sqrt{2\,.\,14^2} = 20 + \sqrt{392}$$

und auf eine ähnliche Art findet man

$$(2 - \sqrt{2})^3 = 20 - \sqrt{392}.$$

Obgleich man nun keine Regel hat, wonach man die Kubikwurzel aus einem Ausdruck wie $20 + \sqrt{392}$ ziehen könnte, ſo dienen dieſe und die folgenden Beiſpiele doch dazu, um anzuzeigen, daß es Fälle giebt, wo man durch die Cardaniſche Formel zu einem

5. Gleichung.

$$x^3 + 3x - 14 = 0.$$

Auflöſung.

Es iſt

$$x^3 = -3x + 14,$$

$$\text{folgl } P = -3,\ Q = 14,$$

$$\text{und alſo } x = \sqrt[3]{\frac{14 + \sqrt{\left[14^2 - \frac{4\cdot(-3)^3}{27}\right]}}{2}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{14 - \sqrt{\left[14^2 - \frac{4\cdot(-3)^3}{27}\right]}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{14}{2} + \sqrt{\frac{14^2+4}{4}}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{14}{2} - \sqrt{\frac{14^2+4}{4}}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{(7+\sqrt{50})} + \sqrt[3]{(7-\sqrt{50})} = \sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}$$

$$= 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2.$$

6. Gleichung.

$$x^3 - \tfrac{15}{2}x + 290\tfrac{1}{2} = 0.$$

Auflöſung.

Hier iſt

$$x^3 = \frac{15x}{2} - 290\tfrac{1}{2},$$

$$\text{folgl. iſt } P = \frac{15}{2},\ Q = 290\tfrac{1}{2},$$

---

irrationalen, oder gar imaginären Ausdruck gelangt, und die Gleichung dennoch eine reelle und rationale Wurzel hat.

und alſo $x = \sqrt[3]{\frac{-290\frac{1}{2} + \sqrt{\left[(-290\frac{1}{2})^2 - \frac{4\cdot(\frac{15}{2})^3}{27}\right]}}{2}}$

$$+\sqrt[3]{\frac{-290\frac{1}{2} - \sqrt{\left[(-290\frac{1}{2})^2 - \frac{4\cdot(\frac{15}{2})^3}{27}\right]}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-\frac{581}{2} + \sqrt{\left(\frac{337561}{4} - \frac{125}{2}\right)}}{2}}$$

$$+\sqrt[3]{\frac{-\frac{581}{2} - \sqrt{\left(\frac{337561}{4} - \frac{125}{2}\right)}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-581 + \sqrt{337311}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{-581 - \sqrt{337311}}{4}}$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{-7 + \sqrt{39}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{-7 - \sqrt{39}}{2}\right)^3}$$

$$= \frac{-7 + \sqrt{39} - 7 - \sqrt{39}}{2} = \frac{-14}{2} = -7.$$

7. Gleichung.

$$x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0.$$

Auflöſung.

Hier muß zuvörderſt das zweite Glied weggeſchafft werden. Um dieſes aber zu bewerkſtelligen, ſetze man $y \pm p$ für x, und in der dadurch erhaltenen Gleichung, welche, in Hinſicht auf y, immer von demſelben Grade ſein wird, wie die gegebene, ſuche man p ſo zu beſtimmen, daß das zweite Glied wegfällt. Nun ſind im Allgemeinen die beiden erſten

Glieder einer Gleichung $x^n + ax^{n-1}$; ſetzt man alſo $x = y - p$, ſo iſt

$$x^n = (y - p)^n = y^n - npy^{n-1}\ldots,$$

und $ax^{n-1} = a\,(y - p)^{n-1} = ay^{n-1}\ldots$

Sollen ſich daher die beiden Glieder npy^{n-1} und ay^{n-1} durch die Addition gegen einander aufheben, ſo muß $np = a$ oder $p = \frac{a}{n}$ ſein, d. h. man muß ſetzen $x = y - \frac{a}{n}$. In dieſem Falle wird man eine andere Gleichung vom nten Grade erhalten, in welcher das zweite Glied nicht vorkommt. Um z. B. alſo aus einer kubiſchen Gleichung $x^3 + ax^2 +$ ꝛc. $= 0$ das zweite Glied wegzuſchaffen, ſetze man $x = y - \frac{a}{3}$, wodurch man eine Gleichung vom dritten Grade erhält, in welcher das zweite Glied fehlt, und wo man alſo durch die Cardaniſche Formel die unbekannte Größe y und folglich auch $x = y - \frac{a}{3}$ finden kann.

In gegenwärtigem Beiſpiele ſetze man daher $x = y + \frac{12}{3}$, das iſt $x = y + 4$. Subſtituirt man dieſen Werth für x in die gegebene Gleichung, ſo iſt

$$\begin{array}{lclcr}
x^3 & = & (y+4)^3 & = & y^3 + 12y^2 + 48y + 64 \\
-12x^2 & = & -12\,(y+4)^2 & = & -12y^2 - 96y - 192 \\
+57x & = & +57\,(y+4) & = & +57y + 228 \\
-94 & = & & & -94 \\
\hline
 & & & & y^3 + 9y + 6 = 0.
\end{array}$$

In dieſer Gleichung fehlt das zweite Glied, und man kann ſetzen

$$y^3 = -9y - 6,$$

folgl. iſt $P = -9$, $Q = -6$.

Es iſt alſo

$$y = \sqrt[3]{\frac{-6 + \sqrt{\left[(-6)^2 - \frac{4\cdot(-9)^3}{27}\right]}}{2}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{-6 - \sqrt{\left[(-6)^2 - \frac{4\cdot(-9)^3}{27}\right]}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-6 + \sqrt{(36 + 108)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-6 - \sqrt{(36 + 108)}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-6 + 12}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-6 - 12}{2}} = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{-9}$$

$$= \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9},$$

folgl. $x = y + 4 = 4 + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9} = 3{,}36216\ldots$

Die folgenden vier Gleichungen werden auf dieſelbe Art, wie die vorhergehende aufgelöſt, weshalb ſie zur Erſparung des Raumes weggelaſſen ſind.

B. Durch Aufſuchung ihrer rationalen Wurzeln.

1. Gleichung.

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0.$$

Auflöſung.

Gleichungen, worin x in einer höhern Potenz, als in der zweiten vorkommt, werden *höhere* Gleichungen genannt. Sie erhalten ihre beſondern Benennungen von der höchſten Potenz, worauf x erhoben iſt; ſo hat man z. B. Gleichungen vom dritten, vierten, fünften Grade ꝛc., je nachdem der höchſte Exponent von x 3, 4, 5 ꝛc. iſt. Man nennt eine jede Gleichung geordnet, wenn alle Exponenten von x in ihrer natürlichen Ordnung bis auf 0 auf einander folgen und keiner derſelben fehlt. Die Gleichung heißt annullirt, wenn alle Glieder auf eine Seite gebracht ſind, und ſich alſo auf der andern Seite 0 befindet. Es läßt ſich daher eine jede geordnete, vollſtändige, annullirte Gleichung im Allgemeinen folgendergeſtalt darſtellen:

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} \cdots + px + q = 0$$

oder auch (wenn nämlich, der Kürze wegen, X einen allgemeinen Ausdruck bezeichnet, der alle Potenzen von x, von der höchſten bis zur niedrigſten, enthält),

$$X = 0.$$

Ein jeder Werth von x, der ſo beſchaffen iſt, daß er an die Stelle von x geſetzt der Gleichung Genüge leiſtet, wird eine Wurzel der Gleichung genannt. Es ſei w eine ſolche Wurzel, oder $x = w$, ſo muß X durch $x - w$ theilbar ſein. Denn wollte man annehmen, daß man bei der Diviſion, außer dem Quotienten Q, auch noch den Reſt R erhalte, ſo kann in dieſem weiter kein x enthalten ſein, weil nämlich die Diviſion noch nicht vollendet wäre, wenn ſich noch im Dividendo x befände. Multiplicirt man alſo den Diviſor $x - w$ mit dem erhaltenen Quotienten Q, und addirt den Reſt R hinzu, ſo muß man das Dividendum X erhalten. Es iſt alſo

$$X = (x - w)\,Q + R.$$

Da nun nach der Vorausſetzung, wenn man $x = w$ ſetzt, der erſte Theil dieſer Gleichung, nämlich X verſchwindet, ſo muß auch, bei dem nämlichen Werthe des x, der zweite Theil $(x - w)\,Q + R$ verſchwinden. Iſt aber $x = w$, oder $x - w = 0$, ſo iſt auch $(x - w)\,Q = 0$, mithin auch $R = 0$; d. h. es kann bei der Diviſion durch $x - w$ kein Reſt übrig bleiben. Es iſt alſo bloß

$$X = (x - w)\,Q.$$

Es iſt einleuchtend, daß Q ein Ausdruck von der nämlichen Form als X, aber vom Grade $n - 1$ iſt; dieſer Ausdruck mag nun X' heißen. Setzt man

$$X' = 0,$$

ſo hat man eine Gleichung von der vorigen Form, welche um einen Grad niedriger iſt. Die Wurzel dieſer Gleichung ſei w' oder $x = w'$, ſo iſt aus obigen Gründen $x - w'$ ein Faktor der Gleichung, und erhält man bei der Diviſion durch $x - w'$ den Quotienten Q', ſo iſt

$$X' = (x - w')\,Q'.$$

Hieraus folgt alſo, daß

$$X = (x - w)\,Q = (x - w)\,(x - w')\,Q'.$$

Nun iſt ferner Q' ebenfalls ein ſolcher Ausdruck, wie X, nur vom Grade $n - 2$. Dieſer Ausdruck mag X'' ſein, ſo daß $Q' = X''$.

Setzt man nun

$$X'' = 0,$$

und nimmt man an, daß $x = w''$ eine Wurzel dieſer Gleichung ſei, ſo findet man, wie vorher,

$$X'' = (x - w'')\, Q''$$

und hieraus

$$X = (x - w)(x - w')(x - w'')\, Q''.$$

Dieſe Operation wird ſo oft wiederholt, als der Exponent n Einheiten enthält, und man erhält am Ende für den Quotienten Q den nämlichen Ausdruck, wie X, wo das x nur im erſten Grade vorkommt. Dieſer letzte Quotient hat alſo auch die Form von $x - w$, und man kann daher behaupten, daß der Ausdruck X aus n Faktoren von der Form $x - w$ zuſammengeſetzt ſei. Es geſchieht aber der Gleichung $X = 0$ ein Genüge, ſobald einer dieſer Faktoren $= 0$ wird, das iſt, wenn man $x = w$, oder $x = w'$ ꝛc. ſetzt, und da dieſes hier auf n verſchiedene Arten geſchehen kann, ſo hat die Gleichung n verſchiedene Wurzeln. Es iſt daher der allgemeine Satz erwieſen, daß eine jede Gleichung ſo viele Wurzeln habe, als der Grad der Gleichung beträgt.

Multiplicirt man nun mehrere Faktoren von der Form $x - w$, $x - w'$, $x - w''$ u. ſ. w., ſo wird man immer ein Reſultat erhalten, worin das letzte Glied ein Produkt der Wurzeln w, w', w'' ꝛc. iſt; folglich müſſen auch in jeder geordneten und annullirten Gleichung die Werthe von x im letzten bekannten Gliede als Faktoren enthalten ſein. Dieſes giebt ein bequemes Mittel an die Hand, durch Zerfällung des letzten Gliedes in ſeine Faktoren die ſämmtlichen Werthe von x zu finden.

Die hier gegebene Gleichung muß drei Wurzeln haben, welche in dem letzten bekannten Gliede 24 aufgehen. Da nun die Zahlen 2, 3, 4, Faktoren von 24 ſind, und für x geſetzt die Gleichung zu 0 machen, ſo iſt $x = 2$, oder $= 3$, oder $= 4$.

2. Gleichung.

$$x^3 - 8x^2 + 5x + 14 = 0.$$

Auflöſung.

Die Faktoren von 14 ſind ± 1, ± 2, ± 7, ± 14. Nun iſt es eine allgemeine Regel, daß die Gleichung immer ſo viele poſitive Wurzeln hat, als Abwechſelungen der Zeichen (+) und (−) vorkommen.*) In der gegebenen Gleichung wechſeln die Zeichen zweimal ab, folglich hat ſie zwei poſitive und eine negative Wurzel. Unterſucht man daher, welche von den genannten Faktoren der Gleichung Genüge thun, ſo findet man

$$x = -1, \text{ oder } 2, \text{ oder } 7.$$

3. Gleichung.

$$x^3 - 49x - 120 = 0.$$

---

*) Der Beweis derſelben gehört in die Theorie der Gleichungen. Ich habe ſie hier angenommen, weil ſie in ſehr vielen Lehrbüchern, jedoch ohne Beweis, vorkommt.

Auflöſung.

Hier wechſeln die Zeichen einmal ab; die Gleichung hat alſo nur einen poſitiven und zwei negative Werthe. Verfährt man nun, wie vorher, und fängt mit den kleinſten Faktoren von 120 an, ſo findet man bald, daß

$$x = -3,\ -5,\ 8.$$

4. Gleichung.

$$x^3 - 18x^2 + 87x - 110 = 0.$$

Auflöſung.

In dieſer Gleichung wechſeln die Zeichen dreimal; die Wurzeln ſind daher alle drei poſitiv, und man findet auf die vorhergehende Art

$$x = 2,\ 5,\ 11.$$

5. Gleichung.

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0.$$

Auflöſung.

Dieſe Gleichung iſt vom vierten Grade, und hat daher vier Wurzeln; und da ferner die Zeichen viermal abwechſeln, ſo ſind die Wurzeln alle poſitiv. Unterſucht man endlich, welche Faktoren von 24 der Gleichung Genüge thun, ſo findet man

$$x = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

6. Gleichung.

$$x^4 - 45x^2 - 40x + 84 = 0.$$

Auflöſung.

Hier wechſeln die Zeichen zweimal ab; es giebt alſo zwei negative und zwei poſitive Wurzeln. Man findet nach obiger Art

$$x = 1,\ -2,\ -6,\ 7.$$

7. Gleichung.

$$x^4 + 29x^3 + 287x^2 + 1147x + 1560 = 0.$$

Auflöſung.

Hier wechſeln die Zeichen gar nicht ab; daher ſind alle vier Wurzeln negativ, und man findet

$$x = -3,\ -5,\ -8,\ -13.$$

8. Gleichung.

$$x^3 + \frac{17}{4}x^2 - \frac{79}{8}x + \frac{15}{4} = 0.$$

Auflöſung.

Um die Wurzeln dieſer Gleichung zu finden, muß man zuvörderſt die Brüche wegſchaffen. Die Brüche aber werden nur dann weggeſchafft, wenn die ganze Gleichung mit einer Zahl multiplicirt wird, worin ſämmtliche Nenner aufgehen. Zugleich aber darf hier durch die Multiplication das erſte Glied oder die höchſte Potenz von x keinen Coefficienten erhalten. Da nun dieſes letztere nur alsdann möglich iſt, wenn x ein Bruch iſt, ſo gebe man der Größe x die Form eines Bruches, ſo daß $x = \frac{y}{n}$. Iſt nun z. B. die

Gleichung $x^3 \pm \frac{a}{b}x^2 \pm \frac{c}{d}x \pm \frac{e}{f} = 0$ gegeben, und ſetzt man ſtatt x den dafür angenommenen Werth $\frac{y}{n}$, ſo erhält man

$$\frac{y^3}{n^3} \pm \frac{ay^2}{bn^2} \pm \frac{cy}{dn} \pm \frac{e}{f} = 0$$

oder wenn mit n^3 multiplicirt wird,

$$y^3 \pm \frac{an}{b}y^2 \pm \frac{cn^2}{d}y \pm \frac{en^3}{f} = 0.$$

Hat man daher für n eine Zahl angenommen, in deren erſter Potenz b, in der zweiten d und in der dritten f aufgeht, ſo iſt dieſe Gleichung von den Brüchen befreit, und es laſſen ſich alsdann die Wurzeln von y, und folglich auch die von $x = \frac{y}{n}$ beſtimmen. Aus allem dem geht hervor, daß man nur nöthig hat, eine Zahl n aufzuſuchen, welche die eben erwähnte Eigenſchaft in Hinſicht ſämmtlicher Nenner beſitzt, und alsdann die einzelnen Glieder der gegebenen Gleichung mit den einzelnen Gliedern der Reihe 1, n, n^2, n^3 ... nämlich x^3 mit 1, $\frac{ax^2}{b}$ mit n, $\frac{cx}{d}$ mit n^2, $\frac{e}{f}$ mit n^3 zu multipliciren, und endlich die auf die gewöhnliche Art gefundenen Wurzeln durch n zu dividiren. Dem zufolge ſetze man im gegenwärtigen Beiſpiele n = 4, und multiplicire die einzelnen Glieder der Gleichung, nach der angezeigten Art, mit 1, 4, 16 und 64, ſo erhält man

$$1 \cdot x^3 + 4 \cdot \tfrac{17}{4}x^2 - 16 \cdot \tfrac{79}{8}x + 64 \cdot \tfrac{15}{4}$$
$$= x^3 + 17x^2 - 158x + 240 = 0.$$

Die Wurzeln dieſer Gleichung ſind 2, 5, — 24. Dividirt man dieſe Wurzeln durch 4, ſo erhält man

$$x = \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -6.$$

9. Gleichung.

$$x^3 - \frac{13x^2}{12} + \frac{3x}{8} - \frac{1}{24} = 0.$$

Auflöſung.

Man ſetze $n = 12$ und multiplicire die einzelnen Glieder der Gleichung mit 1, 12, 144 und 1728, ſo erhält man

$$x^3 - 13x^2 + 54x - 72 = 0.$$

Die Wurzeln dieſer Gleichung ſind 3, 4, 6. Dieſe, durch 12 dividirt, geben

$$x = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}.$$

10. Gleichung.

$$x^3 - \frac{14x^2}{3} + 7x - \frac{10}{3} = 0.$$

Auflöſung.

Man ſetze $n = 3$ und multiplicire die einzelnen Glieder der Gleichung mit 1, 3, 9 und 27, ſo erhält man

$$x^3 - 14x^2 + 63x - 90 = 0.$$

Die Wurzeln dieſer Gleichung ſind 3, 5, 6. Dieſe, durch 3 dividirt, geben

$$x = 1, \frac{5}{3}, 2.$$

11. Gleichung.

$$x^3 + \frac{8x^2}{5} + \frac{9x}{100} - \frac{9}{100} = 0.$$

Auflöſung.

Hier muß $n = 10$ geſetzt, und die einzelnen Glieder der Gleichung mit 1, 10, 100 und 1000 multiplicirt werden. Hierdurch erhält man

$$x^3 + 16x^2 + 9x - 90 = 0.$$

Dieſe Wurzeln dieſer Gleichung ſind 2, -3, -15. Dieſe, durch 10 dividirt, geben

$$x = \tfrac{1}{5},\ -\tfrac{3}{10},\ -\tfrac{3}{2}.$$

12. Gleichung.

$$x^3 - \frac{39x^2}{28} + \frac{31x}{56} - \frac{3}{56} = 0.$$

Auflöſung.

Man ſetze $n = 28$ und multiplicire die einzelnen Glieder der Gleichung mit 1, 28, 28^2 und 28^3, ſo erhält man

$$x^3 - 39x^2 + 9x - 1176 = 0.$$

Die Wurzeln dieſer Gleichung ſind 4, 14, 21. Dieſe, durch 28 dividirt, geben

$$x = \tfrac{1}{7},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{4}.$$

13. Gleichung.

$$x^3 - \frac{139x^2}{24} + \frac{329x}{48} + \frac{55}{16} = 0.$$

Auflöſung.

Man ſetze $n = 24$ und multiplicire die einzelnen

Glieder der Gleichung mit 1, 24, 24² und 24³, ſo erhält man

$$x^3 - 139x^2 + 3948x + 47520 = 0.$$

Die Wurzeln dieſer Gleichung ſind − 9, 60, 88. Dividirt man dieſe durch 24, ſo iſt

$$x = -\tfrac{3}{8},\ \tfrac{6}{2},\ \tfrac{11}{3}.$$

14. Gleichung.

$$x^3 + \frac{82x^2}{15} - \frac{173x}{5} - \frac{126}{5} = 0.$$

Auflöſung.

Man ſetze $n = 15$ und multiplicire die einzelnen Glieder der Gleichung mit 1, 15, 15² und 15³, ſo erhält man

$$x^3 + 82x^2 - 7785x - 85050 = 0.$$

Die Wurzeln dieſer Gleichung ſind − 10, 63, − 135. Dieſe, durch 15 dividirt, geben

$$x = -\tfrac{2}{3},\ \tfrac{21}{5},\ -9.$$

15. Gleichung.

$$x^4 - \frac{19x^3}{4} + \frac{49x^2}{8} - \frac{11x}{4} + \frac{3}{8} = 0.$$

Auflöſung.

Man ſetze $n = 4$ und multiplicire die einzelnen Glieder der Gleichung mit 1, 4, 4², 4³, 4⁴, ſo erhält man

$$x^4 - 19x^3 + 98x^2 - 176x + 96 = 0.$$

Dieſe Gleichung hat vier Wurzeln, nämlich 2, 1, 4, 12. Dieſe, durch 4 dividirt, geben

$$x = \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ 1,\ 3.$$

16. Gleichung.

$$x^4 - \frac{41x^3}{8} + \frac{287x^2}{32} - \frac{393x}{64} + \frac{45}{32} = 0.$$

Auflöſung.

Man ſetze $n = 8$ und multiplicire die einzelnen Glieder der Gleichung mit $1, 8, 8^2, 8^3, 8^4$, ſo erhält man

$$x^4 - 41x^3 + 574x^2 - 3144x + 5760 = 0.$$

Von dieſer Gleichung ſind die Wurzeln 4, 6, 15, 16. Dieſe, durch 8 dividirt, geben

$$x = \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{15}{8}, 2.$$

17. Gleichung.

$$x^3 - 14x^2 - 5x + 70 = 0.$$

Auflöſung.

Es iſt bereits oben angeführt worden, daß der erſte Theil einer jeden annullirten Gleichung ſo angeſehen werden kann, als wäre er aus der Multiplication einer gewiſſen Anzahl Faktoren von der Form $x - w$ entſtanden. Hat man alſo bei einer Gleichung vom dritten Grade eine Wurzel w gefunden, und dividirt die Gleichung durch $x - w$, ſo erhält man zum Quotienten eine quadratiſche Gleichung, aus welcher ſich, durch die Auflöſung derſelben, die beiden andern Wurzeln leicht finden laſſen.

Im gegenwärtigen Beiſpiele findet man, vermittelſt der Faktoren des bekannten Gliedes 70, die Wurzel 14. Da nun aber die kubiſche Gleichung drei Wurzeln haben muß, ſo gebe man der Gleichung $x = 14$ die

Form einer annullirten Gleichung, nämlich $x - 14 = 0$, und dividire mit $x - 14$ in $x^3 - 14x^2 - 5x + 70$, ſo erhält man $x^2 - 5$. Es iſt alſo $x^2 - 5 = 0$ oder $x = \pm \sqrt{5}$. Die drei geſuchten Werthe ſind alſo 14, $+\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$.

18. Gleichung.

$$x^3 - 13x^2 + 49x - 45 = 0.$$

Auflöſung.

Aus dem bekannten Gliede -45 erhält man nur die rationale Wurzel 5, alſo $x = 5$ und $x - 5 = 0$. Dividirt man daher mit $x - 5$ in $x^3 - 13x^2 + 49x - 45$, ſo erhält man $x^2 - 8x + 9$, alſo $x^2 - 8x = -9$. Folglich $x = 4 \pm \sqrt{7}$. Die drei geſuchten Wurzeln ſind alſo 5, $4 + \sqrt{7}$, $4 - \sqrt{7}$.

19. Gleichung.

$$x^3 - 13x^2 + 38x + 16 = 0.$$

Auflöſung.

Aus dem bekannten Gliede 16 erhält man nur die rationale Wurzel 8 oder $x = 8$ und $x - 8 = 0$. Dividirt man daher mit $x - 8$ in $x^3 - 13x^2 + 38x + 16$, ſo erhält man $x^2 - 5x - 2 = 0$, oder $x^2 - 5x = 2$. Folglich iſt $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{(\frac{25}{4} + 2)} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{33}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{33}$. Die drei Werthe ſind alſo 8, $\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33}$, $\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33}$.

20. Gleichung.

$$x^3 - 6x^2 + 19x - 44 = 0.$$

Auflöſung.

Aus dem bekannten Gliede -44 erhält man nur die rationale Wurzel 4 oder $x = 4$ und $x - 4 = 0$. Dividirt man daher mit $x - 4$ in $x^3 - 6x^2 + 19x - 44$, ſo erhält man $x^2 - 2x + 11$, alſo $x^2 - 2x + 11 = 0$, oder $x^2 - 2x = -11$. Folglich $x = 1 \pm \sqrt{(1 - 11)} = 1 \pm \sqrt{-10}$. Die drei Werthe ſind alſo 4, $1 + \sqrt{-10}$, $1 - \sqrt{-10}$.

21. Gleichung.

$$x^3 + \frac{7x^2}{6} + \frac{13x}{2} + \frac{21}{2} = 0.$$

Auflöſung.

Man ſetze $n = 6$ und multiplicire die einzelnen Glieder der Gleichung mit $1, 6, 6^2, 6^3$, ſo erhält man $x^3 + 7x^2 + 234x + 2268 = 0$. Aus dem bekannten Gliede dieſer Gleichung findet man nur die rationale Wurzel -9 oder $x = -9$, alſo $x + 9 = 0$. Dividirt man daher mit $x + 9$ in $x^3 + 7x^2 + 234x + 2268$, ſo erhält man $x^2 - 2x + 252$, alſo $x^2 - 2x + 252 = 0$, $x^2 - 2x = -252$, und folglich $x = 1 \pm \sqrt{(1 - 252)} = 1 \pm \sqrt{-251}$. Die drei Wurzeln der Gleichung $x^3 + 7x^2 + 234x + 2268 = 0$ ſind daher -9, $1 + \sqrt{-251}$, $1 - \sqrt{-251}$. Dividirt man dieſe durch 6, ſo erhält man die geſuchten Wurzeln $-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{-251}$, $\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{-251}$.

22. Gleichung.

$$x^4 + x^3 - 24x^2 + 43x - 21 = 0.$$

Auflöſung.

Aus dem bekannten Gliede 21 erhält man zuvörderſt die Wurzel 1 oder $x = 1$ und $x - 1 = 0$. Dividirt man daher mit $x - 1$ in $x^4 + x^3 - 24x^2 + 43x - 21$, ſo erhält man die kubiſche Gleichung $x^3 + 2x^2 - 22x + 21 = 0$. Nun findet man aus dem Gliede $+ 21$ die Wurzel 3 oder $x = 3$ und $x - 3 = 0$. Man dividire daher ferner mit $x - 3$ in $x^3 + 2x^2 - 22x + 21$, ſo erhält man die quadratiſche Gleichung $x^2 + 5x - 7 = 0$, oder $x^2 + 5x = 7$. Folglich iſt

$$x = -\tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\tfrac{53}{4}} = -\tfrac{5}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{53}.$$

Die vier geſuchten Werthe ſind daher

$$1,\ 3,\ -\tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{53},\ -\tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{53}.$$

53. Gleichung.

$$x^5 - 3x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 9x + 27 = 0.$$

Auflöſung.

Aus dem bekannten Gliede $+ 27$ erhält man zuvörderſt die Wurzel 3 oder $x = 3$ und $x - 3 = 0$. Dividirt man daher mit $x - 3$ in $x^5 - 3x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 9x + 27$, ſo erhält man die biquadratiſche Gleichung $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Nun findet man aus dem Gliede $- 9$ die Wurzel 3; man dividire daher ferner mit $x - 3$ in $x^4 - 8x^2 - 9$, ſo erhält man die kubiſche Gleichung $x^3 + 3x^2 + x + 3 = 0$. Hiervon iſt, wie aus dem bekannten Gliede $+ 3$ erhellet, $- 3$ eine Wurzel oder $x = - 3$ und $x + 3 = 0$. Man dividire daher endlich mit $x + 3$ in $x^3 + 3x^2 + x + 3$, ſo erhält man die quadratiſche Gleichung $x^2 + 1 = 0$ und folglich $x = \pm \sqrt{-1}$. Die fünf verlangten Wurzeln ſind daher $3, 3, -3, -\sqrt{-1}, +\sqrt{-1}$.

24. Gleichung.

$$x^5 - \tfrac{3}{2}x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 13x + 19\tfrac{1}{2} = 0.$$

Auflöſung.

Man ſetze $n = 2$ und multiplicire die einzelnen Glieder der Gleichung mit $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$, ſo erhält man

$$x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 72x^2 - 208x + 624 = 0.$$

Aus dem bekannten Gliede 624 findet man auf die gewöhnliche Art die Wurzel 3. Dividirt man nun mit $x - 3$ in

$$x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 72x^2 - 208x + 624 = 0,$$

ſo erhält man die biquadratiſche Gleichung

$$x^4 - 24x^2 - 208 = 0.$$

Die Methode, die rationalen Theiler des letzten Gliedes zu verſuchen, läßt ſich hier nicht anbringen, weil keiner derſelben zu dieſer Gleichung paßt. Da ſie aber von der Form $x^{2n} + ax^n = b$ iſt, ſo läßt ſie ſich wie eine quadratiſche Gleichung auflöſen, und man erhält

$$x^2 = 12 \pm \sqrt{(144 + 208)} = 12 \pm \sqrt{16 \cdot 22}$$
$$= 4\,(3 \pm \sqrt{22})$$

und $x = \pm \sqrt{4(3 \pm \sqrt{22})} = \pm 2\sqrt{(3 \pm \sqrt{22})}$.

Die fünf Wurzeln der Gleichung

$$x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 72x^2 - 208x + 624 = 0$$

ſind daher

$$3, +2\sqrt{(3+\sqrt{22})}, -2\sqrt{(3+\sqrt{22})}, +2\sqrt{(3-\sqrt{22})}, -2\sqrt{(3-\sqrt{22})}.$$

Dividirt man nun dieſe Wurzeln durch 2, ſo erhält man die geſuchten Wurzeln

$$\tfrac{3}{2}, +\sqrt{(3+\sqrt{22})}, -\sqrt{(3+\sqrt{22})}, +\sqrt{(3-\sqrt{22})}, -\sqrt{(3-\sqrt{22})}.$$

C. Durch Näherung.

Bevor die folgenden Gleichungen aufgelöſt werden, ſoll hier die allgemein bekannte Näherungsmethode vorausgeſchickt werden. Eine Gleichung, deren Wurzeln irrational ſind, durch Näherung aufzulöſen, heißt ſo viel: man ſoll den Werth der darin enthaltenen unbekannten Größe x ſo nahe, daß der Fehler für nichts zu achten iſt, beſtimmen. Dies geſchieht nun auf folgende Art. Zuvörderſt wird unterſucht, zwiſchen welche ganze Zahlen die Wurzel fällt. Man nimmt nämlich für x nach und nach mehrere beſtimmte, poſitive Werthe an, ſetzt ſie in die aufzulöſende Gleichung, und ſieht, welche Werthe ein poſitives, und welche ein negatives Reſultat geben. Diejenigen beiden zunächſt auf einander folgenden Zahlen, wovon die eine das Reſultat poſitiv, und die andere negativ giebt, ſind die Grenzen, zwiſchen welchen die poſitive Wurzel liegt. Die Grenzen der negativen Wurzeln findet man, indem man auf eine gleiche Art für x negative Werthe annimmt. Wenn man ſich nun mit dieſen gefundenen Grenzen nicht begnügen, ſondern den Werth für x noch näher haben will, ſo ſetze man ferner, wenn im Allgemeinen die gefundenen Grenzen w und $w + 1$ ſind, $x = w + p$, wo man unter p einen Bruch verſteht. Es ſei nun zuerſt $x^2 = a$ die gegebene aufzulöſende Gleichung, ſo iſt $x^2 = (w + p)^2 = w^2 + 2wp + p^2 = a$. Da es hier aber nur auf Näherung ankommt, ſo kann man p^2, als ſehr klein (indem jede Potenz eines Bruches kleiner, als der Bruch ſelbſt iſt), weglaſſen. Es iſt alſo $x^2 = w^2 + 2wp = a$, oder $p = \frac{a - w^2}{2w}$. Folglich iſt $x = w + \frac{a - w^2}{2w} = \frac{w^2 + a}{2w}$. Dieſe Formel zeigt, wie man aus jedem gefundenen Werthe einen andern Werth, der der Größe x näher kommt, finden kann. So z. B. iſt für $x^2 = 2$ der nächſte Werth in ganzen Zahlen $= 1$, alſo $w = 1$, und $\frac{1^2 + 2}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$ ein näherer Werth. Aus dem Werthe $\frac{3}{2}$ findet man einen noch nähern, wenn man wieder ſetzt $\frac{(\frac{3}{2})^2 + 2}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{17}{12}$. Ein abermals näherer Werth iſt $\frac{(\frac{17}{12})^2 + 2}{2 \cdot \frac{17}{12}} = \frac{577}{408}$ u. ſ. w.

Auf eine gleiche Art ſchließt man bei der kubiſchen Gleichung $x^3 = a$. Man ſetze nämlich $x = w + p$, ſo iſt $x^3 = w^3 + 3w^2p + 3wp^2 + p^3$. Läßt man aus den vorigen Gründen $3wp^2 + p^3$ weg, ſo iſt

$$x^3 = w^3 + 3w^2p = a, \text{ und } p = \frac{a - w^3}{2w^2},$$

$$\text{folgl. } x = w + \frac{a - w^3}{3w^2} = \frac{2w^3 + a}{3w^2}.$$

Es ſei ferner die vollſtändige kubiſche Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ gegeben, von welcher w die nächſte Grenze ſei, ſo ſetze man ebenfalls $x = w + p$, folgl. $x^3 = w^3 + 3w^2p$ ꝛc. und $x^2 = w^2 + 2wp$ ꝛc. Subſtituirt man dieſe Werthe für x in die gegebene Gleichung, ſo erhält man

$$w^3 + 3w^2p + aw^2 + 2awp + bw + bp + c = 0$$

$$\text{oder } p\,(-3w^2 - 2aw - b) = w^3 + aw^2 + bw + c,$$

$$\text{und } p = \frac{w^3 + aw^2 + bw + c}{-3w^2 - 2aw - b},$$

$$\text{folgl. } x = w + \frac{w^3 + aw^2 + bw + c}{-3w^2 - 2aw - b} = \frac{-2w^3 - aw^2 + c}{-3w^2 - 2aw - b}$$

oder multiplicirt man Zähler und Nenner mit -1,

$$\text{ſo erhält man } x = \frac{2w^3 + aw^2 - c}{3w^2 + 2aw + b}.$$

Auf eben dieſe Art verfährt man bei einer Gleichung vom vierten Grade. Es ſei z. B. $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, und w, als die nächſte Grenze einer ihrer Wurzeln, bekannt; ſo ſetze man wieder $x = w + p$; $x^2 = w^2 + 2wp$ ꝛc.; $x^3 = w^3 + 3w^2p$ ꝛc.; $x^4 = w^4 + 4w^3p$ ꝛc. Subſtituirt man dieſe Werthe in die gegebene Gleichung, ſo erhält man

$$w^4 + 4w^3p + aw^3 + 3aw^2p + bw^2 + 2bwp + cw + cp + d = 0$$

$$\text{oder } p\,(-4w^3-3aw^2-2bw-c) = w^4+aw^3+bw^2+cw+d$$

$$\text{und } p = \frac{w^4+aw^3+bw^2+cw+d}{-4w^3-3aw^2-2bw-c},$$

$$\text{folgl. } x = w+p = w+\frac{w^4+aw^3+bw^2+cw+d}{-4w^3-3aw^2-2bw-c}$$

$$= \frac{-3w^4-2aw^3-bw^2+d}{-4w^3-3aw^2-2bw-c}.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner mit -1, ſo erhält man

$$x = \frac{3w^4+2aw^3+bw^2-d}{4w^3+3aw^2+2bw+c}.$$

Nun ſei ganz im Allgemeinen die Gleichung

$$x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}+cx^{m-3}\;\ldots\ldots+hx^2+kx+l=0$$

gegeben, und die nächſte Grenze einer ihrer Wurzeln $= w$, ſo ſetze man $x = w+p$, ſo iſt

$$\begin{aligned} x^m &= w^m + mw^{m-1}p,\\ x^{m-1} &= w^{m-1} + (m-1)\,w^{m-2}p,\\ x^{m-2} &= w^{m-2} + (m-2)\,w^{m-3}p,\\ x^{m-3} &= w^{m-3} + (m-3)\,w^{m-4}p.\\ &\;\;\vdots \qquad\quad \vdots\\ x^2 &= w^2 + 2wp. \end{aligned}$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in die gegebene allgemeine Gleichung, ſo erhält man

$$\begin{aligned} &w^m+mw^{m-1}p+aw^{m-1}+(m-1)\,aw^{m-2}p+bw^{m-2}\\ &\quad+(m-2)\,bw^{m-3}p+cw^{m-3}+(m-3)\,cw^{m-4}p\\ &\quad\ldots\ldots+hw^2+2hwp+kw+kp+l=0 \end{aligned}$$

oder $$p\,[mw^{m-1} + (m-1)\,aw^{m-2} + (m-2)\,bw^{m-3} + (m-3)\,cw^{m-1} \ldots + 2hw + k] = -w^m - aw^{m-1} - bw^{m-2} - cw^{m-3} \ldots - hw^2 - kw - 1,$$

und $$p = \frac{\left\{\begin{matrix} -w^m - aw^{m-1} - bw^{m-2} - cw^{m-3} \\ \ldots - hw^2 + kw - 1 \end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix} mw^{m-1} + (m-1)aw^{m-2} + (m-2)bw^{m-3} \\ + (m-3)\,cw^{m-4} \ldots + 2hw + k \end{matrix}\right\}},$$

folglich

$$x = w + p = w + \frac{\left\{\begin{matrix} -w^m - aw^{m-1} - bw^{m-2} - cw^{m-3} \\ \ldots - hw^2 - kw - 1 \end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix} mw^{m-1} + (m-1)aw^{m-2} + (m-2)bw^{m-3} \\ + (m-3)\,cw^{m-4} \ldots + 2hw + k \end{matrix}\right\}}$$

$$= \frac{\left\{\begin{matrix} (m-1)\,w^m + (m-2)\,aw^{m-1} + (m-3)\,bw^{m-2} \\ \ldots + hw^2 - 1 \end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix} mw^{m-1} + (m-1)\,aw^{m-2} + (m-2)\,bw^{m-3} \\ \ldots + 2hw + k \end{matrix}\right\}}.$$

Aus dieſer allgemeinen Formel findet man ſehr leicht die für eine Gleichung von irgend einem beſtimmten Grade. So iſt z. B. bei der Gleichung vom fünften Grade $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

$$x = \frac{\left\{\begin{matrix} (5-1)\,w^5 + (5-2)\,aw^{5-1} + (5-3)\,bw^{5-2} \\ + (5-4)\,cw^{5-3} - e \end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix} 5w^{5-1} + (5-1)\,aw^{5-2} + (5-2)\,bw^{5-3} \\ + (5-3)\,cw^{5-4} + d \end{matrix}\right\}}$$

$$= \frac{4w^5 + 3aw^4 + 2bw^3 + cw^2 - e}{5w^4 + 4aw^3 + 3bw^2 + 2cw + d}.$$

Nunmehr laſſen ſich folgende Gleichungen ſehr leicht auflöſen.

1. Gleichung.

$$x^3 = 2.$$

Auflöſung.

Es iſt $x^3 - 2 = 0$. Bei dieſer Gleichung fällt die irrationale Wurzel zwiſchen 1 und 2; denn 1 ſtatt x geſetzt, giebt zum Reſultat − 1, und 2 giebt + 6. Man kann daher, wenn keine größere Schärfe verlangt wird, $x = 1$ ſetzen.

Im Falle aber, daß x genauer angegeben werden ſollte, ſo erwäge man, daß die Näherungsformel für die kubiſche Gleichung $x = \frac{2w^3 + aw^2 - c}{3w^2 + 2aw + b}$ iſt. Da alſo hier $w = 1$, $a = 0$, $b = 0$ und $c = -2$, ſo iſt $x = \frac{2 \cdot 1^3 - (-2)}{3 \cdot 1^2} = \frac{2 + 2}{3} = \frac{4}{3}$.

Subſtituirt man ferner $\frac{4}{3}$ für w, ſo erhält man

$$x = \frac{2 \cdot (\frac{4}{3})^3 - (-2)}{3 \cdot (\frac{4}{3})^2} = \frac{91}{72}.$$

Dieſen Werth aufs neue ſubſtituirt, giebt

$$x = \frac{2 \cdot (\frac{91}{72})^3 - (-2)}{3 \cdot (\frac{91}{72})^2} = \frac{2253638}{1788696} \text{ ꝛc.}$$

2. Gleichung.

$$x^3 = 30.$$

Auflöſung.

Es iſt $x^3 - 30 = 0$. Hier fällt die irrationale Wurzel zwiſchen 3 und 4; denn 3 ſtatt x geſetzt, giebt zum Reſultat -3, und 4 an die Stelle von x geſetzt, giebt $+34$. Man kann daher vorerſt ſetzen $x = 3$.

Will man x näher kommen, ſo ſetze man in der Näherungsformel für die kubiſchen Gleichungen $w = 3$, $a = 0$, $b = 0$, $c = -30$. Dieſes giebt

$$x = \frac{2 \cdot 3^3 - (-30)}{3 \cdot 3^2} = \frac{28}{9}.$$

Subſtituirt man ſtatt w dieſen gefundenen Werth für x, ſo erhält man

$$x = \frac{2 \cdot \left(\frac{28}{9}\right)^3 - (-30)}{3 \cdot \left(\frac{28}{9}\right)^2} = \frac{65774}{21168} \text{ ꝛc.}$$

3. Gleichung.

$$x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0.$$

Auflöſung.

Die irrationale Wurzel dieſer Gleichung fällt zwiſchen 3 und 4; denn 3 ſtatt x geſetzt, giebt zum Reſultat -4, und 4 an die Stelle von x geſetzt, giebt $+6$. Es iſt daher vorerſt $x = 3$.

Nähere Werthe findet man, wenn man in der Näherungsformel für kubiſche Gleichungen $w = 3$, $a = -12$, $b = 57$, $c = -94$ ſetzt. Es iſt alsdann

$$x = \frac{2 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3^2 - (-94)}{3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 12 \cdot 3 + 57} = \frac{10}{3}.$$

Subſtituirt man ſtatt w in der erwähnten Formel den gefundenen Werth $\frac{10}{3}$, ſo iſt

$$x = \frac{2 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^3 - 12 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 - (-94)}{3 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 - 2 \cdot 12 \cdot \frac{10}{3} + 57} = \frac{938}{279} \text{ ꝛc.}$$

4. Gleichung.

$$x^3 - 15x^2 - 72x - 109 = 0.$$

Auflöſung.

Eine Wurzel dieſer Gleichung fällt zwiſchen 5 und 6; denn ſetzt man 5 ſtatt x, ſo iſt das Reſultat + 1, und ſetzt man 6 ſtatt x, ſo iſt es − 1. Man hat alſo ſchon vorläufig $x = 5$.

Verlangt man einen nähern Werth für x, ſo ſubſtituire man in der Näherungsformel für die kubiſche Gleichung $w = 5$, $a = -15$, $b = 72$, $c = -109$. Hierdurch erhält man

$$x = \frac{2 \cdot 5^3 - 15 \cdot 5^2 - (-109)}{3 \cdot 5^2 - 2 \cdot 15 \cdot 5 + 72} = \frac{16}{3}.$$

Subſtituirt man ferner ſtatt w den gefundenen Werth $\frac{16}{3}$, ſo iſt

$$x = \frac{2 \cdot \left(\frac{16}{3}\right)^3 - 15 \cdot \left(\frac{16}{3}\right)^2 - (-109)}{3 \cdot \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 2 \cdot 15 \cdot \frac{16}{3} + 72} = \frac{385}{72} \text{ ꝛc.}$$

Auf eine ähnliche Art findet man die Auflöſungen zur fünften, ſechſten und ſiebenten Aufgabe, welche Auflöſungen hier zur Erſparung das Raumes weggeblieben ſind.

8. Gleichung.

$$x^4 - 4x^3 + 18 = 0.$$

Auflöſung.

Eine Wurzel dieſer Gleichung fällt zwiſchen 2 und 3. Denn ſubſtituirt man 2 ſtatt x, ſo erhält man zum Reſultat + 2, ſetzt man aber 3 ſtatt x, ſo erhält man − 9. Man hat daher einen ziemlich nahen Werth von x, wenn man ſetzt $x = 2$.

Um nähere Werthe für x zu erhalten, ſo bediene man ſich der Näherungsformel für die Gleichungen vom vierten Grade, nämlich

$$x = \frac{3w^4 + 2aw^3 + bw^2 - d}{4w^3 + 3aw^2 + 2bw - c},$$

und zwar indem man ſetzt $w = 2$, $a = -4$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 18$, wodurch man erhält

$$x = \frac{3 \cdot 2^4 - 2 \cdot 4 \cdot 2^3 - 18}{4 \cdot 2^3 - 3 \cdot 4 \cdot 2^2} = \frac{17}{8}.$$

Subſtituirt man ferner den gefundenen Werth $\frac{17}{8}$ ſtatt w, ſo iſt

$$x = \frac{3 \cdot \left(\frac{17}{8}\right)^4 - 2 \cdot 4 \cdot \left(\frac{17}{8}\right)^3 - 18}{4\left(\frac{17}{8}\right)^3 - 3 \cdot 4\left(\frac{17}{8}\right)^2} = \frac{137597}{64736} \text{ ꝛc.}$$

9. Gleichung.

$$x^4 + 8x^2 + 16x - 440 = 0.$$

Auflöſung.

Eine Wurzel dieſer Gleichung fällt zwiſchen 4 und 5; denn 4 ſtatt x geſetzt, giebt zum Reſultat – 52, und 5 ſtatt x geſetzt, giebt + 465. Es iſt daher 4 ein naher Werth von x, und man kann ſetzen x = 4.

Einen nähern Werth für x findet man, wenn man in der Näherungsformel für die Gleichung vom vierten Grade ſtatt w, a, b, c, d, die gehörigen Werthe ſetzt, nämlich w = 4, a = 0, b = 8, c = 16, d = – 440, woraus ſich ergiebt

$$x = \frac{3 \cdot 4^4 + 8 \cdot 4^2 - (-440)}{4 \cdot 4^3 + 2 \cdot 8 \cdot 4 + 16} = \frac{167}{42}.$$

Subſtituirt man ferner $\frac{167}{42}$ ſtatt w, ſo iſt

$$x = \frac{3 \cdot \left(\frac{167}{42}\right)^4 + 8 \cdot \left(\frac{167}{42}\right)^2 + 440}{4 \cdot \left(\frac{167}{42}\right)^3 + 2 \cdot 8 \cdot \frac{167}{42} + 16} = \frac{4096104771}{1030204056} \text{ ꝛc.}$$

Von den Aufgaben.

(Zu Meier Hirſch, Sammlung von Beiſpielen, XV. Kapitel, S. 162 flg.

VI.

Auflöſungen der Aufgaben für die Gleichungen des erſten Grades mit einer unbekannten Größe.

1.

Das Vermögen des A ſei x,
ſo iſt das von B = 2x.
Es iſt alſo $2x + x = 38700$,
folgl. $x = 12900$ Vermögen des A,
und 25800 Vermögen des B.

2.

Wenn der eine x Thlr. erhält,
ſo erhält der andere 4x Thlr.
Es iſt alſo $x + 4x = 2500$,
folglich $x = 500$ für A,
und 2000 für B.

3.

Er habe x Thlr. Courant,
und alſo $4\frac{1}{2}x$ Thlr. Münze.

Es iſt daher $x + 4\frac{1}{2}x = 2640$,
folgl. $x = 480$ Thlr. Courant,
mithin beträgt die Münze $4\frac{1}{2} \cdot 480 = 2160$ Thlr.

4.

Wenn der eine Theil $= x$,
ſo iſt der andere $= 1\frac{1}{4}x$.
Es iſt alſo $x + 1\frac{1}{4}x = 237$,
folgl. $x = 105\frac{1}{3}$,
und der andere Theil iſt $1\frac{1}{4} \cdot 105\frac{1}{3} = 131\frac{2}{3}$.

5.

Wenn die eine Zahl $= x$,
ſo iſt die andere $= mx$.
Es iſt alſo $x + mx = a$,
folglich $x = \frac{a}{m + 1}$,
und die andere Zahl $= \frac{ma}{m + 1}$.

6.

Wenn der Antheil des $A = x$,
ſo iſt der von $B = \frac{7x}{2}$.
Es iſt alſo $x + \frac{7x}{2} = 1200$,
folgl. $x = 266\frac{2}{3}$ Thlr. für A,
und mithin der Antheil des $B = \frac{7 \cdot 266\frac{2}{3}}{2} = 933\frac{1}{3}$ Thlr.

7.

Der eine Theil ſei $= x$,

ſo iſt der andere $= \frac{nx}{m}$.

Es iſt alſo $x + \frac{nx}{m} = a$,

folgl. $x = \frac{ma}{m+n}$,

und alſo der andere Theil $= \frac{nma}{m(m+n)} = \frac{na}{m+n}$.

8.

Er habe x Thlr.,
ſo iſt $\frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x = 2\frac{1}{4}$ Thlr.,
folgl. $x = 5$ Thlr.

9.

Das Pferd koſte x Thlr.,
ſo iſt $\frac{x}{5} + \frac{x}{7} = 48$,
folgl. $x = 140$ Thlr.

10.

Die geſuchte Zahl ſei x,
ſo iſt $\frac{x}{m} + \frac{x}{n} = a$
oder $nx + mx = mna$,
folgl. $x = \frac{mna}{m+n}$.

11.

Der eine Theil ſei x,
ſo iſt der andere $46 - x$.

Es iſt alſo $\frac{x}{7} + \frac{46 - x}{3} = 10$,
folgl. $x = 28$,
und der andere Theil $= 46 - 28 = 18$.

12.

Der eine Theil ſei x, und alſo der andere $a - x$,
ſo iſt $\frac{x}{m} + \frac{a - x}{n} = b$,
folgl. $x = \frac{m\,(nb - a)}{n - m}$ = dem einen Theil,
und alſo der andere Theil $= a - \frac{m(nb - a)}{n - m} = \frac{an - mnb}{n - m}$
oder $\frac{mnb - an}{m - n} = \frac{n\,(mb - a)}{m - n}$.

13.

Die Anzahl der Studenten ſei x,
ſo iſt die der Kaufleute $= 4x$,
und die der Offiziere $= 2x$.
Es iſt alſo $x + 4x + 2x = 266$,
folgl. $x = 38$ Studenten,
mithin ſind 152 Kaufleute
und 76 Offiziere.

14.

Die Anzahl der Cavalleriſten ſei x,
ſo iſt die der Infanteriſten $= 9x$,
und der Artilleriſten $= 3x$.
Es iſt daher $x + 9x + 3x = 2600$,

folgl. $x = 200$ Cavalleriſten,
mithin ſind 600 Artilleriſten
und 1800 Infanteriſten.

15.

Die Anzahl der Meilen zu Pferde ſei $= x$,
ſo iſt die zu Waſſer $= 3\frac{1}{2}x$,
und die zu Fuß $= 2\frac{1}{3} \cdot 3\frac{1}{2}x = 8\frac{1}{6}x$.
Es iſt alſo $x + 3\frac{1}{2}x + 8\frac{1}{6}x = 3040$,
folgl. $x = 240$ Meilen zu Pferde,
hieraus folgt 840 — zu Waſſer
und 1960 — zu Fuß.

16.

Der kleinſte Theil ſei x, ſo iſt der zweite mx und der dritte nx, alſo

$$x + mx + nx = a,$$

folgl. $x = \dfrac{a}{1 + m + n}$,

und alſo der zweite Theil $= \dfrac{ma}{1 + m + n}$,

und der dritte $= \dfrac{na}{1 + m + n}$.

17.

Die Zahl ſei $= x$,
ſo iſt $\frac{4x}{3} = 24$,
folgl. $x = 18$.

18.

Der Antheil des A ſei = x,

ſo iſt der des B = $\frac{11x}{5}$,

und der des C = $\frac{16x}{5}$.

Es iſt daher $x + \frac{11x}{5} + \frac{16x}{5} = 864$,

folgl. x = 135 Q. R. für A,
mithin 297 Q. R. für B,
und 432 Q. R. für C.

19.

A erhalte x,
ſo erhält B $1\frac{1}{3}x$,
und C 2x.

Es iſt alſo $x + 1\frac{1}{3}x + 2x = 1170$,

folgl. x = 270 für A,
mithin 360 für B,
und 540 für C.

20.

A ſtelle x Mann,

ſo muß B $\frac{5x}{3}$ Mann,

und C $\frac{7 \cdot 5x}{8 \cdot 3} = \frac{35x}{24}$ Mann ſtellen.

Es iſt daher $x + \frac{5x}{3} + \frac{35x}{24} = 594$,

folgl. $x = 144$ Mann für A,
mithin 240 Mann für B
und 210 Mann für C.

21.

A erhalte x Thlr.,
ſo erhält B $\frac{3x}{2}$,
C $\frac{5 \cdot 3x}{4 \cdot 2} = \frac{15x}{8}$,
und D $\frac{7 \cdot 15x}{6 \cdot 8} = \frac{105x}{48} = \frac{35x}{16}$.
Es iſt alſo $x + \frac{3x}{2} + \frac{15x}{8} + \frac{35x}{16} = 21000$,
folgl. $x = 3200$ Thlr. für A,
mithin 4800 Thlr. für B,
6000 Thlr. für C,
und 7000 Thlr. für D.

22.

Wenn der erſte Theil $= x$,
ſo iſt der zweite $= \frac{nx}{m}$,
und der dritte $= \frac{nqx}{mp}$.
Es iſt daher $x + \frac{nx}{m} + \frac{nqx}{mp} = a$,
folgl. $x = \frac{amp}{mp + np + nq}$,

mithin der zweite Theil $= \frac{anp}{mp + np + nq}$,

und der dritte Theil $= \frac{anq}{mp + np + nq}$.

23.

Wenn ſeine Einkünfte $= x$ geſetzt werden,
ſo zahlt er für Koſt und Miethe $\frac{1}{3}x$,
für Kleidung und Wäſche $\frac{1}{8}x$,
für Nebenausgaben $\frac{1}{16}x$.
Nun bleiben ihm nach der Aufgabe 318 Thlr. übrig.
Es iſt alſo $\frac{1}{3}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}x + 318 = x$,
folgl. $x = 720$ Thlr.

24.

Sein angelegtes Kapital ſei x Thlr.
Da nun 15 Prozent $= \frac{3}{20}$ vom ganzen Kapitale iſt,
ſo hat er $\frac{3}{20}x$ mit x gewonnen.
Es iſt daher $x + \frac{3}{20}x = 15571$ Thlr.,
folgl. $x = 13540$ Thlr.

25.

Das Kapital betrage x Thlr.,
ſo iſt $100 : 104\frac{1}{2} = x : \frac{104\frac{1}{2}x}{100}$.
Es iſt alſo $\frac{104\frac{1}{2}x}{100} = 13167$ Thlr.,
folgl. $x = 12600$ Thlr.

26.

Der vorjährige Ertrag ſei x.

Da nun $100 : 8 = x : \frac{2}{25}x$,
ſo iſt der diesjährige Ertrag $x + \frac{2}{25}x$.
Es iſt daher $x + \frac{2}{25}x = 1890$,
folgl. $x = 1750$.

27.

Das Pfund dieſer Waare habe x gr. gekoſtet. Da nun $12\frac{1}{2}$ Procent der 8te Theil vom ganzen Kapital iſt, ſo iſt $\frac{1}{8}x$ gr. gewonnen.

Es iſt daher $x + \frac{1}{8}x = 18$,
folgl. $x = 16$ gr. Einkaufspreis eines Pfundes,
und $73\frac{1}{3}$ Thlr. Einkaufspreis eines Centners.

28.

4 Procent iſt $\frac{1}{25}$ vom Kapital, das macht auf 5 Jahr $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ vom Kapital.

Es iſt alſo $x + \frac{1}{5}x = 8208$,
folgl. $x = 6840$ Thlr.

29.

Er habe x Thlr. bei ſich gehabt,
ſo iſt ſein Verluſt $(\frac{1}{6} + \frac{1}{10})x = \frac{4}{15}x$,
und ſein Gewinnſt $= \frac{1}{3}x$.
Es iſt daher $\frac{1}{3}x - \frac{4}{15}x = 3$,
oder $\frac{1}{15}x = 3$,
folgl. $x = 45$.

30.

Wenn die eine Zahl x iſt,
ſo iſt die andere $96 - x$.

Es iſt alſo $x + 16 = 96 - x$,
folgl. $x = 40$,
und mithin die andere Zahl $= 96 - 40 = 56$.

31.

A erhalte x Thlr.,
ſo erhält B $\frac{1}{2}x + 50$ Thlr.
Es iſt daher $x + \frac{1}{2}x + 50 = 1200$,
folgl. $x = 766\frac{2}{3}$ Thlr für A,
mithin $433\frac{1}{3}$ Thlr. für B.

32.

A erhalte x Thlr.,
ſo erhält B $x + 100$ Thlr.,
und C $x + 370$ Thlr.
Es iſt alſo $3x + 470 = 1520$,
folgl. $x = 350$ Thlr. für A,
mithin 450 Thlr. für B,
und 720 Thlr. für C.

33.

Eine Tochter bekomme x Thlr., alſo drei Töchter $3x$,
ein Sohn $2x$ Thlr., alſo zwei Söhne $4x$,
folgl. erhält die Wittwe $7x + 500$ Thlr.
Es iſt alſo $3x + 4x + 7x + 500 = 7500$,
folgl. $x = 500$ Thlr für eine Tochter,
mithin 1000 Thlr. für jeden Sohn,
und 4000 Thlr. für die Wittwe.

34.

Die Anzahl der Weiber ſei x,
alſo iſt die der Männer $= x + 4$,
und die der Kinder $= 2x + 14$.
Es iſt alſo $x + x + 4 + 2x + 14 = 90$,
folgl. $x = 18$ Weiber,
mithin 22 Männer
und 50 Kinder.

35.

B bekomme x Quadratfuß,
ſo erhält A $x + 276$
und C $x + 1112$.
Es iſt daher $x + x + 276 + x + 1112 = 8000$,
folgl. $x = 2204$ für B,
und hieraus 2480 für A
und 3316 für C.

36.

Der jüngſte erhalte x Thlr.,
der zweite erhält alſo $x + 20$,
der dritte $x + 40$,
der vierte $x + 60$,
der fünfte $x + 80$.
Es iſt alſo $5x + 200 = 1000$,
folgl. $x = 160$.

37.

Die Summe ſei x Thlr.,

ſo erhält A $\frac{1}{2}x - 3000$,
B $\frac{1}{3}x - 1000$,
C $\frac{1}{4}x + 800$.
Es iſt daher $\frac{1}{2}x - 3000 + \frac{1}{3}x - 1000 + \frac{1}{4}x + 800 = x$,
folgl. $x = 38400$,
und hiernach beſtimmt man den Antheil eines jeden.

38.

Das hinterlaſſene Vermögen ſei x,
ſo erhält die Frau $\frac{1}{2}x$,
jeder Sohn $\frac{1}{6}x$, alſo beide $\frac{1}{3}x$,
der Bediente $\frac{1}{12}x$.
Es iſt daher $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{12}x + 600 = x$,
folgl. $x = 7200$,
und hienach findet man den Antheil eines jeden.

39.

A erhalte x Quadratfuß,
ſo erhält B $\frac{11x}{6}$,
und C $x + \frac{11x}{6} + 300$.
Es iſt alſo $x + \frac{11x}{6} + x + \frac{11x}{6} + 300 = 2850$,
folgl. $x = 450$ für A,
und hieraus 825 für B,
und 1575 für C.

40.

D erhalte x Thlr.,

und C erhält nach der Aufgabe 360 Thlr.,
folgl. erhält B $x + 360$
und A $2x - 280$.

Es iſt daher $x + 360 + x + 360 + 2x - 280 = 2520$,
folgl. $x = 520$ Thlr. für D,
und hieraus 880 Thlr. für B,
760 Thlr. für A.

41.

A bekomme x Thlr.,
ſo erhält B $2x + 200$,
C $3x - 400$,

$$D \quad \frac{5x - 200}{2} + 150 = \frac{4x - 200 + 300}{2}$$

$$= \frac{5x + 100}{2},$$

$$E \quad \frac{6x - 200 + \frac{5x + 100}{2}}{4} + 475$$

$$= \frac{17x - 300}{8} + 475 = \frac{17x - 300 + 3800}{8}$$

$$= \frac{17x + 3500}{8}.$$

Es iſt alſo

$$x + 2x + 200 + 3x - 400 + \frac{5x + 100}{2} + \frac{17x + 3500}{8} = 5600,$$

folgl. $x =$ 500 für A,
und hieraus 1200 für B,
1100 für C,
1300 für D,
1500 für E.

42.

A habe x Thlr. verloren,
ſo hat B $3x + \frac{1}{2}$ Thlr.,
C $6x - 1$ Thlr.,
D $4x + \frac{1}{4}$ Thlr.
und E $6x + \frac{7}{8}$ Thlr.
verloren. Es iſt daher

$$x + 3x + \tfrac{1}{2} + 6x - 1 + 4x + \tfrac{1}{4} + 6x + \tfrac{7}{8} = 40\tfrac{5}{8} \text{ Thlr.},$$

folgl. $x = 2$ Thlr. für A, und hieraus $6\frac{1}{2}$ für B,
11 für C, $8\frac{1}{4}$ für D, $12\frac{7}{8}$ für E.

43.

Es mögen x Centner verkauft worden ſein, man behielt alſo $40 - x$ Centner übrig.

Es iſt daher $40 - x = x + 8$,
folgl. $x = 16$.

44.

Er habe x Thlr. ausgegeben,
ſo blieben ihm noch $42 - x$.
Es iſt alſo $42 - x = 3x$,
folgl. $x = 10\frac{1}{2}$ Thlr.

45.

A habe x Thlr. gewonnen; er beſitzt alſo nach dem Spiele $42 + x$,
und B $24 - x$.
Es iſt alſo $42 + x = (24 - x)\,5$,
folgl. $x = 13$.

46.

Die Anzahl der Cavalleriſten ſei x,
ſo iſt die der Infanteriſten $= 1250 - x$.
Es iſt daher $5x + (1250 - x)\,3 = 4150$,
folgl. $x = 200$ Cavalleriſten
und alſo 1050 Infanteriſten.

47.

Sie mögen x Tage gearbeitet haben,
ſo hat der Meiſter $\frac{1}{2}x$ Thlr.,
der Geſelle $\frac{5}{12}x$, alſo 12 Geſellen $5x$,
der Handlanger $\frac{1}{3}x$, alſo 4 Handlanger $\frac{4x}{3}$ erhalten.
Es iſt daher $\frac{1}{2}x + 5x + \frac{4}{3}x = 61\frac{1}{2}$ Thlr.,
folgl. $x = 9$ Tage.

48.

Das ſämmtliche Kapital ſei x.
Es iſt daher $\frac{1}{25} \cdot \frac{4}{5}x + \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{5}x = 2940$ Thlr.,
folgl. $x = 70000$ Thlr.

49.

Die Zahl ſei x,
ſo iſt $\frac{7x + 3}{2} - 4 = 15$,
folgl. $x = 5$.

50.

Eine Zahl ſei x,
ſo iſt die zweite $2x + 1$,
die dritte $6x + 6$.

Es iſt daher $9x + 7 = 70$,
folgl. $x = 7$, mithin die zweite $= 15$,
und die dritte $= 48$.

51.

Er habe x Groſchen bei ſich,

$$\text{ſo iſt } \frac{(5x - 3)\, 4 + 2}{10^{*)}} = 23,$$

folgl. $x = 12$.

52.

Die Zahl ſei x,

$$\text{ſo iſt } \frac{5x - 24}{6} + 13 = x,$$

folgl. $x = 54$.

53.

In x Tagen mag er ihn einholen,
ſo hat der erſte $40 + 4x$,
und der zweite 9x Meilen zurückgelegt.
Es iſt daher $40 + 4x = 9x$,
folgl. $x = 8$.

54.

Er hole den Boten in x Tagen ein,
ſo hat der erſte $na + ax$,
und der zweite bx Meilen gemacht.

---

*) Die Null zur Rechten einer Zahl weglaſſen, heißt ſo viel, als die Zahl durch 10 dividiren.

Es iſt alſo $na + ax = bx$,

$$\text{folgl. } x = \frac{na}{b - a}.$$

55.

Der zweite Bote erreiche den erſten in x Tagen, alsdann war der erſte $x + 12$ Tage auf der Reiſe. Die Geſchwindigkeit des zweiten zum erſten verhält ſich wie $8:3$, d. h. wenn der zweite in einem Tage 8 Meilen zurücklegt, ſo legt der erſte nur 3 Meilen zurück. Der zweite hat alſo $8x$ Meilen und der erſte $3(x+12)$ Meilen gemacht, und da ſie beide einen gleich großen Weg zurück gelegt haben,

ſo iſt $8x = 3\,(x + 12)$,

folgl. $x = 7\frac{1}{5}$ Tage.

56.

Der zweite Körper erreiche den erſten in x Secunden, alsdann war der erſte $x + n$ Secunden unterweges. Es iſt demnach $qx = p\,(x + n)$,

$$\text{folgl. } x = \frac{pn}{q - p}.$$

57.

In x Stunden nach der Abreiſe der erſten Couriers mögen ſie zuſammentreffen. Da nun der erſte Courier in 5 Stunden 7 Meilen macht, ſo macht er in einer Stunde $\frac{7}{5}$ Meilen; der zweite legt in 3 Stunden 5 Meilen zurück, folglich macht er in einer Stunde $\frac{5}{3}$ Meilen.

Der erſte hat alſo überhaupt

$$\tfrac{7}{5}\cdot 8 + \tfrac{7}{5}x = 11\tfrac{1}{5} + \frac{7x}{5} \text{ Meilen,}$$

und der zweite $\frac{5x}{3}$ zurückgelegt.

Es iſt daher $11\tfrac{1}{5} + \frac{7x}{5} = \frac{5x}{3}$,

folgl. $x = 42$ Stunden.

58.

Der erſte hat $8 + 11\tfrac{1}{5} + \frac{7x}{5}$,

und der zweite hat $\frac{5x}{3}$ Meilen zurückgelegt.

Es iſt daher $8 + 11\tfrac{1}{5} + \frac{7x}{5} = \frac{5x}{3}$,

folgl. $x = 72$.

59.

Die Zeit, in welcher beide Couriere zuſammentreffen, nachdem der zweite abgereiſt, ſei $= x$,

ſo hat der erſte $a + \frac{bc}{d} + \frac{cx}{d}$,

und der zweite $\frac{ex}{f}$ Meilen zurückgelegt.

Es iſt alſo $a + \frac{bc}{d} + \frac{cx}{d} = \frac{ex}{f}$,

folgl. $x = \frac{(ad + bc)\,f}{de - cf}$.

60.

Es ſei wieder die Zeit, in welcher beide Couriere zuſammentreffen, nachdem der zweite abgereiſt, $= x$,

ſo hat der erſte $\frac{bc}{d} + \frac{cx}{d} - a$,

und der zweite $\frac{ex}{f}$ Meilen zurückgelegt.

Es iſt alſo $\frac{bc}{d} + \frac{cx}{d} - a = \frac{ex}{f}$,

folgl. $x = \frac{(bc - ad)\,f}{de - cf}$.

61.

Die Regimenter mögen ſich in x Tagen nach dem Ausmarſche des zweiten begegnen, ſo hat

A $3\frac{1}{2} \cdot 8 + 3\frac{1}{2}x = 28 + 3\frac{1}{2}x$,

und B $5\frac{1}{6}x$ Meilen gemacht.

Es iſt daher $3\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{6}x + 28 = 80$,
folgl. $x = 6$ Tage nach dem Ausmarſche des zweiten, und mithin 14 Tage nach dem Ausmarſche des erſten.

62.

Die beiden Körper werden in x Secunden zuſammenſtoßen. Der eine hat alſo in dieſen x Secunden cx Fuß, und der andere Cx Fuß durchlaufen.

Es iſt alſo $cx + Cx = d$,

folgl. $x = \frac{d}{C + c}$.

63.

Der zweite wird den erſten Körper in x Secunden erreichen, und macht alſo Cx Fuß, während der erſte d + cx Fuß zurücklegt.

Es iſt demnach $Cx = d + cx$,

folgl. $x = \frac{d}{C - c}$.

64.

Die Anzahl der vom nachſetzenden Corps täglich zu machenden Meilen ſei x,

ſo hat das erſte Corps $2 \cdot 4\frac{1}{2} + 6 \cdot 4\frac{1}{2} = 36$,

und das nachſetzende 6x Meilen gemacht.

Es iſt daher $6x = 36$,

folgl. x = 6 Meilen.

65.

In x Secunden wird der zweite Körper den erſten erreichen, der zweite hat alſo Cx Fuß durchlaufen, und da der erſte bereits d Fuß voraus hatte, und ſchon t Secunden in Bewegung war, bevor der zweite zu laufen anfing, ſo iſt der Weg des erſten = d Fuß + ct Fuß + cx Fuß.

Es iſt demnach $Cx = d + ct + cx$,

folgl. $x = \frac{d + ct}{C - c}$.

66.

Mit Bezug auf die vorhergehende Aufgabe erhält man die Gleichung

$$Cx + ct + cx = d,$$

folgl. $x = \frac{d - ct}{C + c}$.

67.

Man nehme an, der Stunden- und Minutenzeiger ſtehe auf 12. Nun mag der Stundenzeiger, nachdem er ſich x Minuten vorwärts bewegt hat, von dem Minutenzeiger eingeholt worden ſein. Der Minutenzeiger muß alſo während der Zeit, in welcher der Stundenzeiger die x Minuten zurücklegt, nicht allein dieſe x Minuten, ſondern auch noch den ganzen Stundenkreis, das ſind 60 Minuten, durchlaufen haben, oder während der Stundenzeiger x Minuten gemacht hat, muß der Minutenzeiger $x + 60$ Minuten gemacht haben. Da nun die Geſchwindigkeit des Minutenzeigers 12mal ſo groß iſt, als die des Stundenzeigers, oder da der Minutenzeiger bei einer gleichzeitigen Bewegung mit dem Stundenzeiger einen 12mal ſo großen Raum zurücklegt, ſo müſſen auch $x + 60$ Minuten einen 12mal ſo großen Raum, als x Minuten ausmachen,

d. i. $x + 60 = 12x$

oder $11x = 60$,

folgl. $x = 5\frac{5}{11}$ Minuten,

wo ſie ſich zum erſten Mal decken. Geht der Stundenzeiger abermals $5\frac{5}{11}$ Minuten, ſo decken ſie ſich zum zweiten Mal ꝛc. Die Zeiger decken ſich alſo bei $5\frac{5}{11}$ Minuten nach eins, $10\frac{10}{11}$ Minuten nach zwei, $16\frac{4}{11}$ Minuten nach drei ꝛc., und da $5\frac{5}{11}$ in 60 11mal enthalten iſt, ſo werden beide Zeiger 11mal zuſammentreffen.

68.

Da beide Körper anfänglich d Fuß von einander entfernt waren, ſo erreicht der zweite Körper den erſten in $\frac{d}{C-c}$ Secunden (Auflöſung 63). Soll nun der zweite Körper den erſten zum zweiten Mal erreichen, ſo muß er außer dem Weg, den der erſte macht, auch noch den ganzen Kreis durchlaufen, und die Entfernung beider Körper iſt daher, bevor ſie ſich zu bewegen anfangen, = p Fuß; der zweite erreicht alſo den erſten in $\frac{p}{C-c}$ Secunden. Betrachtet man folglich die Zeit, in welcher beide Körper ſeit ihrem erſten Auslaufen zum zweiten Mal zuſammentreffen, ſo iſt ſolche $= \frac{p}{C-c} + \frac{d}{C-c} = \frac{p+d}{C-c}$ Secunden. Auf gleiche Art findet man die Zeit, in welcher beide Körper zum dritten Mal zuſammentreffen, $= \frac{p}{C-c} + \frac{p+d}{C-c}$ $= \frac{2p+d}{C-c}$ Sec. ꝛc.

69.

Nach der 65ſten Auflöſung iſt es einleuchtend, daß zur Bewegung des erſten Körpers noch der Ausdruck ct hinzukommen muß. Die anfängliche Entfernung beider Körper iſt daher d + ct, und ſie erreichen ſich alſo zum erſten Mal, nach der vorhergehenden Auflöſung, in $\frac{d+ct}{C-c}$ Secunden, zum zweitenmal in $\frac{p + d + ct}{C - c}$ Secunden, zum drittenmal in $\frac{2p + d + ct}{C - c}$ Secunden ꝛc.

70.

Fängt ſich der erſte um t Secunden ſpäter zu bewegen an, als der zweite ihm folgende Körper, ſo iſt alles wieder, wie vorher, nur mit dem Unterſchiede, daß nun die anfängliche Entfernung nicht um ct größer, ſondern geringer iſt. Der Ausdruck ct muß daher immer abgezogen werden, und es iſt demnach die Zeit des erſten Zuſammentreffens $= \frac{d - ct}{C - c}$ Sec., die des zweiten $= \frac{p + d - ct}{C - c}$ Sec., die des dritten $= \frac{2p + d - ct}{C - c}$ Secunden ꝛc.

71.

Beide Körper waren anfänglich um d Fuß von einander entfernt. Der erſte hat ſich um t Secunden früher zu bewegen angefangen, die Entfernung des zweiten ihm entgegenlaufenden Körpers iſt daher zu Anfange ſeiner Bewegung = d — ct Fuß. Folglich geſchieht das erſte Zuſammentreffen beider Körper in $\frac{d - ct}{C + c}$ Secunden. Um ſich nun zum zweitenmal zu begegnen, müſſen beide Körper zuſammen den Raum p durchlaufen, ihre Entfernung iſt daher = p, und ſie begegnen ſich alſo zum zweitenmal in $\frac{p}{C + c}$ Secunden. Der Zeitraum vom erſten Anfange der Bewegung bis zum zweiten Zuſammentreffen iſt demnach $= \frac{d - ct}{C + c} + \frac{p}{C + c} = \frac{p + d - ct}{C + c}$ Sec. ꝛc.

72.

Da der erſte Körper ſich um t Secunden ſpäter, als der zweite zu bewegen anfängt, ſo iſt es in Hinſicht des Zuſammentreffens beider Körper eben ſo gut, als wenn der erſte gleich anfänglich außer der Entfernung d auch noch um den Raum, den er in t Secunden zurücklegen kann, von dem zweiten entfernt wäre. Die anfängliche Entfernung iſt daher $= d + ct$, und das Zuſammentreffen beider Körper geſchieht demnach in $\frac{d + ct}{C + c}$ Sec. Hiernach geſchieht das zweite Zuſammentreffen, nach voriger Aufgabe, in $\frac{p + d + ct}{C + c}$ Secunden ꝛc.

73.

Es iſt einleuchtend, daß die Größe der Waſſermenge, welche ein Behälter in einem gewiſſen Zeitraume ergießt, in genauem Verhältniß ſteht mit der Größe der Mündung, und mit dem Grade der Geſchwindigkeit, womit das Waſſer in einer Secunde ausſtrömt. Es iſt demnach das Verhältniß der Waſſermengen von beiden Behältern für einen gleichen

Zeitraum zuſammengeſetzt aus den Zahlen, welche die Größe der Mündung und die Grade der Geſchwindigkeit ausdrücken. Nun ſind die beiden Verhältnißzahlen des einen Behälters 5 und 8, und die des zweiten Behälters 13 und 7. Es verhalten ſich alſo beide Waſſermengen für einen gleichen Zeitraum, wie 40 : 91. Es fließe nun aus der erſten Oeffnung x Cubikfuß, ſo fließt aus der andern in derſelben Zeit x + 561 Cubikfuß. Es iſt daher

$$40 : 91 = x : x + 561,$$

folgl. $x = 440$ Cubikf.

74.

Die Anzahl der Sprünge, welche der Haſe noch machen kann, ehe der Hund ihn einholt, ſei x. Da nun der Haſe 6 Sprünge macht, während der Hund 5 Sprünge zurücklegt, ſo muß der Hund in dem Augenblick, wo er den Haſen eingeholt hat, $\frac{5}{6}x$ Sprünge gemacht haben. Der Hund hat alſo durch die größere Weite ſeiner Sprünge nicht allein $\frac{1}{6}x$ Haſenſprünge, ſondern auch noch die 50 Sprünge, welche der Haſe bereis voraus hatte,

alſo $\frac{1}{6}x + 50$ Haſenſprünge

gemacht. Nun gehen 7 Hundeſprünge auf 9 Haſenſprünge, folgl. gewinnt der Hund bei jedem Sprung $\frac{2}{7}$ Haſenſprünge; da er nun $\frac{5}{6}x$ Sprünge gemacht hat, ſo muß er $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}x$ Sprünge gewonnen haben, und da er hierdurch $\frac{1}{6}x + 50$ Haſenſprünge macht, ſo iſt

$$\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}x = \frac{1}{6}x + 50,$$
$$\text{folgl. } x = 700.$$

75.

Die Anzahl der Würfe, die der zweite zu machen hat, ſei x, ſo hat der erſte in derſelben Zeit $\frac{8}{7}x$, alſo überhaupt

$\frac{8}{7}x + 36$ Würfe

gemacht. Da nun der zweite zu 3 Würfen ſo viel Pulver, wie der erſte zu 4 bedarf, ſo verhält ſich die Quantität des Pulvers, welche der zweite bei einem Wurfe gebraucht, zu der, welche der erſte bedarf, wie 4 : 3. Da ſich aber bei gleichem Pulverbedarf die Anzahl der Würfe umgekehrt, wie die Quantitäten des Pulvers bei einem Wurfe verhalten, ſo iſt

$$x : \frac{8}{7}x + 36 = 3 : 4$$
$$\text{oder } 4x = \frac{24x}{7} + 108,$$
$$\text{folgl. } x = 189.$$

76.

Der vorgeeilte heiße A und der zurückgebliebene B. Es habe B x Fuß, alſo A x + 3000 Fuß zurückgelegt. Nun verhält ſich die Anzahl der Schritte des A zu der des B, wie 5 : 1, ferner verhält ſich die Größe des Schrittes von A zu der des B, wie 1 : 2. Da nun das Verhältniß des zurückgelegten Weges beider Spaziergänger aus den Verhältniſſen der Anzahl und Größe ihrer Schritte zuſammengeſetzt iſt, ſo verhalten ſich die zurückgelegten Wege, wie $5 \cdot 1 : 1 \cdot 2 = 5 : 2$. Es iſt alſo

$$x + 3000 : x = 5 : 2$$
oder $5x = 2x + 6000$,
folgl. $x = 2000$ Fuß für B,
und alſo 5000 Fuß für A.

77.

Die Anzahl Fuß, welche A zurückgelegt hat, ſei x, ſo iſt die Anzahl Fuß von B $x + a$. Nun verhält ſich die Anzahl der Schritte des A zu der des B, wie $d : e$; ferner verhält ſich die Größe des Schrittes von A zu der des Schrittes von B, wie $b : c$. Das zuſammengeſetzte Verhältniß der zurückgelegten Wege von A und B iſt daher $= bd : ce$. Es iſt alſo

$$x : x + a = bd : ce$$
oder $cex = bdx + abd$,
folgl. $x = \frac{abd}{ce - bd}$ für A,

und mithin iſt der Weg des $B = \frac{abd}{ce - bd} + a$

$$= \frac{ace - abd + abd}{ce - bd} = \frac{ace}{ce - bd}.$$

78.

Nach den in der 73ſten Auflöſung angeſtellten Betrachtungen erhält man hier

$$mm' : nn' = x : x + d,$$

$$\text{folgl. } x = \frac{mm'd}{nn' - mm'} \text{ 2c.}$$

79.

Dieſe Aufgabe wird ganz ebenſo gelöſt, wie die vorhergehende.

80.

In dieſem Falle erhält man

$$mm'm'' : nn'n'' = x : S - x,$$

$$\text{folgl. } x = \frac{mm'm''S}{nn'n'' + mm'm''} \text{ 2c.}$$

81.

x ſei die Anzahl Jahr, in welchen beide Kapitalien zuſammen auf Zinſen geſtanden haben, d. h. 5500 Thlr. haben $4\frac{1}{2} + x$ Jahr zu 4 Procent, und 8000 Thlr. haben x Jahr zu 5 Procent geſtanden. Nun haben die 5500 in $4\frac{1}{2}$ Jahren 990 Thlr. Zinſen getragen, folglich betragen die Intereſſen von dieſem Kapitale $990 + \frac{1}{25} \cdot 5500 \cdot x = 990 + 220x$. Da nun die Intereſſen von 8000 Thlrn. zu 5 Procent in x Jahren $\frac{1}{20} \cdot 8000 \cdot x = 400x$ machen, ſo iſt

$$990 + 220x = 400x,$$

$$\text{folgl. } x = 5\tfrac{1}{2} \text{ Jahr},$$

d. h. $5\frac{1}{2}$ Jahr ſind beide Kapitalien zuſammen, und folglich das erſte Kapital $5\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} = 10$ Jahr ausgeliehen geweſen.

82.

Das hintere Rad habe x Umläufe, alſo das vordere $x + 2000$ Umläufe gemacht. Da nun das hintere Rad $7\frac{1}{8}$ Fuß im Umfange hat, und daher auch bei jedem Umlauf $7\frac{1}{8}$ Fuß Weg zurücklegt, ſo hat es bei x Umläufen $7\frac{1}{8}x$ Fuß, und ebenſo das vordere $(x + 2000)\, 5\frac{1}{4} = 5\frac{1}{4}x + 10500$ Fuß zurückgelegt. Da nun der zurückgelegte Weg des hintern und vordern Rades gleich ſein muß, ſo iſt

$$7\tfrac{1}{8}x = 5\tfrac{1}{4}x + 10500,$$

folgl. $x = 5600$,

und mithin iſt der zurückgelegte Weg

$$= 7\tfrac{1}{8} \cdot 5600 = 39900 \text{ Fuß}.$$

83.

Das hintere Rad habe x, alſo das vordere $x + n$ Umläufe gemacht. Das hintere Rad hat alſo bx Fuß und das vordere $(x + n)\, a$ Fuß zurückgelegt. Es iſt daher

$$bx = (x + n)\, a,$$

folgl. $x = \frac{an}{b - a}$

die Anzahl der Umläufe des hintern Rades; und mithin iſt der zurückgelegte Weg

$$\frac{an}{b - a} \cdot b = \frac{abn}{b - a}.$$

84.

Er nehme x Quart zu 36 Gr., und alſo $50 - x$ zu 20 Gr. Dieſe Miſchung koſtet daher

$$36x + 20\ (50 - x).$$

Nach der Aufgabe ſoll hiervon das Quart 30 Gr., folglich die ganze Miſchung $50 \cdot 30 = 1500$ Gr. koſten. Es iſt alſo

$$36x + 20\ (50 - x) = 1500,$$

folgl. $x = 31\frac{1}{4}$ Quart à 36 Gr.,

und mithin $18\frac{3}{4}$ Quart à 20 Gr.

85.

Er nehme x Quart zu a Gr. und alſo $n - x$ Quart zu b Gr. Dieſe Miſchung koſtet daher $ax + (n - x)\ b$. Nach der Aufgabe ſoll hiervon das Quart c Gr. und folglich die ganze Miſchung nc Gr. koſten. Es iſt daher

$$ax + (n - x)\ b = nc,$$

folgl. $x = \frac{n\ (c - b)}{a - b}$ zu a Gr.,

und mithin $n - x = n - \frac{n\ (c - b)}{a - b}$

$$= \frac{n\ (a - b) - n\ (c - b)}{a - b} = \frac{n\ (a - c)}{a - b}$$

vom Weine zu b Gr.

86.

Er nehme x Mark 14löthiges und alſo $20 - x$ 8löthiges Silber, ſo iſt in der Schmelzung

$14x + 8\ (20 - x)$ Loth Silber enthalten.

Nach der Aufgabe ſoll dieſe Schmelzung 12löthig ſein, alſo $20 \cdot 12 = 240$ Loth Silber enthalten. Es iſt demnach

$$14x + 8\,(20 - x) = 240,$$

folgl. x = $13\frac{1}{3}$ Mark 12löthiges Silber,

und mithin $6\frac{2}{3}$ Mark 8löthiges Silber.

87.

40 Quart Wein à 1 Thlr. 8 Gr. betragen 1280 Gr. Er habe nun x Quart Waſſer zugemiſcht, ſo enthält die Miſchung x + 40 Quart. Hiervon will er das Quart für 20 Groſchen verkaufen; er erhält alſo dafür (x + 40) 20 Gr. Es iſt alſo

$$(x + 40)\,20 = 1280,$$

folgl. x = 24 Quart Waſſer.

88.

35 Mark à 15 Loth betragen 525 Loth reines Silber. Er habe nun x Mark Kupfer zugeſetzt, ſo beträgt die Schmelzung 35 + x Mark. Hiervon ſoll die Mark 12 Loth Silber enthalten; es iſt alſo

$$(35 + x)\,12 = 525,$$

folgl. x = $8\frac{3}{4}$ Mark Kupfer.

89.

$7\frac{1}{2}$ Mark 13löthiges Silber enthalten $97\frac{1}{2}$ Loth reines Silber. Hierzu habe man x Mark 8löthiges geſetzt, ſo enthält die Schmelzung $97\frac{1}{2} + 8x$ Loth Silber und wiegt $7\frac{1}{2} + x$ Mark. Da aber die Mark 9 Loth Silber enthalten ſoll, ſo enthält die Schmelzung $(7\frac{1}{2} + x)$ 9 Loth. Es iſt demnach

$$97\tfrac{1}{2} + 8x = (7\tfrac{1}{2} + x)\,9,$$

folgl. x = 30 Mark 8löthiges Silber.

90.

Iſt die Anzahl der Viergroſchenſtücke x, ſo iſt die der Sechsgroſchenſtücke 17 — x. Es iſt daher

$$4x + (17 - x)\,6 = 90 \text{ Gr.},$$

folgl. $x = 6$ Viergroſchenſtücke,

und alſo 11 Sechsgroſchenſtücke.

91.

Die eine Zahl ſei x,

ſo iſt die andere $a - x$.

Es iſt demnach $mx + n\,(a - x) = b$,

folgl. $x = \dfrac{b - an}{m - n}$ ꝛc.

92.

Nach x Jahren. Alsdann iſt der Vater 40 + x und der Sohn 9 + x Jahr alt. Es iſt alſo

$$40 + x = 2\,(9 + x),$$

folgl. $x = 22$ Jahr.

93.

Nach x Jahren. Alsdann iſt der eine 30 + x und der andere 20 + x Jahr alt. Mithin iſt

$$30 + x : 20 + x = 5 : 4,$$

alſo $4\,(30 + x) = 5\,(20 + x)$,

folgl. $x = 20$ Jahr.

94.

Vor x Jahren. Damals war der ältere 30 — x und der jüngere 20 — x Jahr alt. Es iſt alſo

$$30 - x = 6\,(20 - x),$$

folgl. $x = 18$ Jahr.

95.

Nach x Jahren. Alsdann iſt der ältere $30 + x$, der mittlere $20 + x$ und der jüngſte $6 + x$ Jahr alt. Es iſt daher

$$30 + x = 20 + x + 6 + x,$$

folgl. $x = 4$ Jahr.

96.

Vor x Jahren. Damals war der Vater $49 - x$ und die drei Brüder zuſammen waren $30 - x + 20 - x + 6 - x$ Jahr alt. Es iſt daher

$$49 - x = 30 - x + 20 - x + 6 - x,$$

folgl. $x = 3\frac{1}{2}$ Jahr.

97.

Vor x Jahren. Damals war der Vater $49 - x$ Jahr, und die beiden Söhne waren $30 - x + 20 - x$ Jahr alt. Es iſt alſo

$$49 - x = 50 - 2x + \frac{50 - 2x}{4},$$

folgl. $x = 9$ Jahr.

98.

Nach der Aufgabe enthält die Maſſe von 80 Pfund 56 Pfund Salpeter und 24 Pfund Schwefel. Nun mögen x Pfund Sapeter zugeſetzt werden, ſo iſt

$$56 + x : 24 = 11 : 4,$$

alſo $4\,(56 + x) = 11 \cdot 24$,
folgl. $x = 10$ Pfund Salpeter.

99.

x Pfund Schwefel. Alsdann iſt
$56 : 24 - x = 11 : 4$,
alſo iſt $4 \cdot 56 = 11\,(24 - x)$,
folgl. $x = 3\frac{7}{11}$ Pfund Schwefel.

100.

x Pfund. Alsdann iſt
$56 + x : 24 - x = 11 : 4$,
alſo iſt $4\,(56 + x) = 11\,(24 - x)$,
folgl. $x = 2\frac{2}{3}$ Pfund.

101.

War anfänglich die Anzahl der Damen $= x$, ſo war die der Herren $= 3x$. Nachdem alſo 8 Männer mit ihren Frauen weggingen, blieben noch $3x - 8$ Herren und $x - 8$ Damen zurück. Es iſt daher
$3x - 8 : x - 8 = 5 : 1$,
alſo $3x - 8 = (x - 8)\,5$,
folgl. $x = 16$ Damen,
und alſo 48 Herren.

102.

Die Zahl, welche zu den beiden gegebenen Zahlen addirt werden muß, ſei x, ſo iſt
$a + x : b + x = m : n$,

alſo $an + nx = bm + mx$,

folgl $x = \frac{bm - an}{n - m}$.

103.

Die geſuchte Zahl ſei x, ſo iſt

$$a + x : b - x = m : n,$$

alſo $an + nx = bm - mx$,

folgl. $x = \frac{bm - an}{m + n}$.

104.

Die verlangte Zahl ſei x, ſo iſt

$$a - x : b - x = m : n,$$

alſo $an - nx = bm - mx$,

folgl. $x = \frac{an - bm}{n - m}$.

105.

In x Stunden. In dieſer Zeit iſt durch das erſte Spundloch $\frac{x}{2}$, durch das zweite $\frac{x}{3}$, und durch das dritte $\frac{x}{4}$ vom Weine ausgelaufen. Es iſt daher

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 1,$$

folgl. $x = \frac{12}{13}$ Stunden $= 55\frac{5}{13}$ Minuten.

106.

In x Stunden. In dieſer Zeit iſt durch die erſte

Röhre $\frac{x}{1\frac{1}{3}} = \frac{3x}{4}$, durch die zweite $\frac{x}{3\frac{1}{3}} = \frac{3x}{10}$, durch die dritte $\frac{x}{5}$ vom Waſſerbehälter gefüllt worden. Es iſt daher

$$\frac{3x}{4} + \frac{3x}{10} + \frac{x}{5} = 1,$$

folgl. $x = \frac{4}{5}$ Stunden $= 48$ Minuten.

107.

Es ſei x die geſuchte Zeit, ſo iſt, wie in voriger Auflöſung,

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = 1,$$

$$\text{folgl. } x = \frac{abc}{ab + ac + bc}.$$

108.

Wenn die geſuchte Zeit gleich x, ſo iſt

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} + \frac{x}{d} = 1,$$

$$\text{folgl. } x = \frac{abcd}{abc + abd + acd + bcd}.$$

109.

Die Zeit, welche dazu erforderlich iſt, ſei x, ſo hat der erſte $\frac{8x}{5}$, der zweite $\frac{9x}{4}$, der dritte $\frac{10x}{6}$ Cubikfuß verfertigt. Es iſt daher

$$\frac{8x}{5} + \frac{9x}{4} + \frac{10x}{6} = 756,$$

folgl. $x = 137\frac{13}{331}$ Tage.

110.

Auch hier ſei die Zeit x, ſo iſt, wie vorher,

$$\frac{ax}{b}+\frac{cx}{d}+\frac{ex}{f}=g,$$

$$\text{folgl. } x=\frac{bdfg}{adf+bcf+bde}.$$

111.

In x Tagen. In dieſer Zeit füllt die erſte $\frac{12x}{3\frac{1}{4}}$ $=\frac{48x}{13}$, die zweite $\frac{15\frac{1}{3}x}{2\frac{1}{2}}=\frac{92x}{15}$, und die dritte $\frac{17x}{3}$ Cubikfuß. Es iſt daher

$$\frac{48x}{13}+\frac{92x}{15}+\frac{17x}{3}=755\tfrac{1}{4},$$

folgl. x = 48¾ Tage.

112.

Die geſuchte Zeit ſei x, ſo iſt

$$\frac{ex}{t}+\frac{e'x}{t'}+\frac{e''x}{t''}=E,$$

$$\text{folgl. } x=\frac{Ett't''}{et't''+e'tt''+e''tt'}.$$

113.

Ein jedes Stück Metall betrage x Cubikzoll, ſo wiegt das erſte $\frac{69\frac{3}{4}x}{5}=\frac{279x}{20}$, das zweite $\frac{41x}{3\frac{1}{3}}=\frac{123x}{10}$, das dritte $\frac{91x}{4\frac{2}{7}}=\frac{637x}{30}$ Loth. Es iſt demnach

$$\frac{279x}{20} + \frac{123x}{10} + \frac{637x}{30} = 949\tfrac{2}{3},$$

folgl. $x = 20$.

114.

Die Geſellſchaft beſtehe aus x Perſonen, ſo ſind, nach der Aufgabe, 16x Groſchen um 240 Gr. mehr, als man bedarf; 10x Groſchen hingegen um 300 Gr. weniger, als gebraucht wird. Es ſind demnach 16x Groſchen nicht allein um 240, ſondern auch noch um 300, alſo um 540 Groſchen mehr, als 10x Groſchen. Es iſt alſo

$$16x = 10x + 540,$$

folgl. $x = 90$ Perſonen u. ſ. w.

115.

Das Gewicht der Waare ſei x Pfund. Da nun 30x Groſchen 120 Groſchen mehr, und 22x Groſchen 360 Groſchen weniger, als der Einkaufspreis ſind, ſo ſind 30x Groſchen um $120 + 360 = 480$ Groſchen mehr, als 22x Groſchen. Es iſt demnach

$$30x = 22x + 480,$$

folgl. $x = 60$ Pfund u. ſ. w.

116.

Er habe x Looſe ausgeſpielt. Da nun 30 Groſchen um 480 Groſchen weniger, und 40x Groſchen um 320 Groſchen mehr ſind, als die Uhr gekoſtet hat, ſo ſind 30x Groſchen um $480 + 320 = 800$ Groſchen weniger, als 40x Groſchen. Es iſt demnach

$$30x + 800 = 40x,$$

folgl. $x = 80$ Looſe u. ſ. w.

117.

Die Anzahl der Maurer ſei x, ſo folgt aus der Aufgabe, daß mx Groſchen um a weniger und nx Groſchen um b mehr iſt, als veranſchlagt worden; mx iſt alſo um $a + b$ weniger, als nx. Es iſt daher

$$mx + a + b = nx,$$

folgl. $x = \frac{a + b}{n - m}$ Anzahl der Maurer ꝛc.

118.

Es ſei x die erſte geſuchte Zahl, ſo iſt

$mx - a =$ der andern Zahl,

und auch $m'x - a' =$ dieſer Zahl,

folgl. $mx - a = m'x - a'$,

und alſo $x = \frac{a - a'}{m - m'}$,

und die andere Zahl

$$= mx - a = m\frac{a - a'}{m - m'} - a = \frac{m'a - ma'}{m - m'}.$$

119.

Die Zahl ſei x, ſo iſt nach der Aufgabe

$$5x - 20 = 20 - x,$$

folgl. $x = 6\frac{2}{3}$.

120.

Das jährliche Einkommen ſei x, ſo iſt das, was ihm noch fehlt, um ſeine Ausgaben zu beſtreiten, 540 — x. Hat er aber $3\frac{1}{2}x$, ſo hat er mehr, als er bedarf; dieſer Ueberſchuß iſt aber nothwendig $= 3\frac{1}{2}x - 540$. Es iſt daher

$$3\tfrac{1}{2}x - 540 = 540 - x,$$

folgl. $x = 240$ Thlr. jährliches Einkommen.

121.

Er ſchreibe, zu 4 Stunden täglich, wöchentlich x Bogen, ſo iſt das, was noch fehlt an 70 Bogen, $=70-x$. Arbeitet er aber 10 Stunden täglich, d. i. $2\frac{1}{2}$ mal länger, als 4 Stunden, ſo liefert er wöchentlich $2\frac{1}{2}x$ Bogen, was, nach der Aufgabe, mehr, als 70 Bogen beträgt. Dieſer Ueberſchuß iſt aber $= 2\frac{1}{2}x - 70$. Es iſt daher

$$2\tfrac{1}{2}x - 70 = 70 - x,$$

folgl. $x = 40$ Bogen.

123. *)

Die Entfernung ſei x Fuß, ſo iſt das, was noch an 1000 fehlt, $= 1000 - x$. Verfährt er aber mit der Entfernung x, wie es der zweite Theil der Aufgabe vorſchreibt, ſo giebt dieſes $(\frac{4}{3}x + 176)\,2\frac{1}{2}$, was nach der Aufgabe, mehr, als 1000 beträgt. Den Ueberſchuß findet man, indem man ſetzt $(\frac{4}{3}x + 176)\,2\frac{1}{2} - 1000$. Es iſt daher

---

*) In den Aufgaben iſt die Paragraphenzahl 122 aus Verſehen des Hrn. Verfaſſers überſprungen worden.

$$\left(\tfrac{4}{3}x + 176\right) 2\tfrac{1}{2} - 1000 = 1000 - x,$$
folgl. $x = 360$ Fuß.

124.

Die Zahl der Schuldner ſei x. Da nun 250x um 2000 Thlr. zu wenig, 340x aber um 880 Thlr. zu viel iſt, ſo iſt 340x um 2000 + 880 = 2880 größer, als 250x. Es iſt daher

$$340x = 250x + 2880,$$
folgl. $x = 32$ Schuldner ꝛc.

125.

Es iſt einleuchtend, daß ſich, bei gleichen Procenten, die Intereſſen von verſchiedenen Kapitalien in verſchiedenen Zeiten, wie die Produkte aus den Zeiten in die Kapitalien verhalten. Denn es ſei z. B. ein Kapital a zu p Procent jährlichen Zinſen ausgeliehen, ſo betragen die Intereſſen auf ein Jahr $\frac{ap}{100}$ und auf m Jahre $\frac{amp}{100}$. Nun ſei ein anderes Kapital b ebenfalls zu p Procent jährlichen Zinſen ausgeliehen, ſo betragen die Intereſſen auf ein Jahr $\frac{bp}{100}$ und auf n Jahre $\frac{bpn}{100}$. Es verhalten ſich alſo die Intereſſen, welche die Kapitalien a und b in den Zeiten m und n getragen haben, wie $\frac{apm}{100} : \frac{bpn}{100} = am : bn$. Soll daher die Zahlung nach x Monaten geſchehen, ſo iſt

$$6842x = 2832 \cdot 3 + 2560 \cdot 9 + 1450 \cdot 16,$$

folgl. $x = 8$ Monate.

126.

Iſt auch hier die geſuchte Anzahl der Monate $= x$, und ſchließt man, wie in der vorigen Auflöſung, ſo iſt

$$x\,(a + b + c + d) = al + bm + cn + dp,$$

folgl. $x = \dfrac{al + bm + cn + dp}{a + b + c + d}$.

127.

Noch x Monate. Alsdann haben die 5000 Thlr. $14 + x$ Monate, die 3000 Thlr. $8 + x$, und die 8000 Thlr. x Monate geſtanden. Da nun, dem Uebereinkommen zu Folge, die 16000 Thlr. auf 15 Monate hätten verliehen werden ſollen, ſo iſt

$$16000 \cdot 15 = 5000\,(14 + x) + 3000\,(8 + x) + 8000x,$$

folgl. $x = 9\frac{1}{8}$ Monate.

128.

Noch x Monate. Alsdann haben die 200 Stück $15 + x$ Monate, die 250 Stück $8 + x$ Monate, und die 150 Stück x Monate geweidet. Da nun, dem Contracte zu Folge, 400 Stück 16 Monate weiden ſollen, ſo iſt

$$400 \cdot 16 = 200\,(15 + x) + 250\,(8 + x) + 150x,$$

folgl. $x = 2\frac{1}{3}$ Monate.

129.

Da der Käufer erſt nach einem Jahre zu bezahlen nöthig hat, ſo tragen ihm die 4500 Thlr. in 12 Monaten $4500 \cdot 12$ Thlr. Intereſſen. Nimmt man nun an, daß die Zeit zwiſchen je zwei Terminen $= x$ ſei, ſo behält der Käufer die erſten 750 Thlr. x Monate, die zweiten $2x$, die dritten $3x$, die vierten $4x$ Monate. Die Intereſſen hiervon betragen alſo $750 + 750 \cdot 2x + 750 \cdot 3x + 750 \cdot 4x = 750 \cdot 10x$. Es iſt daher

$$4500 \cdot 12 = 750 . 10x,$$

folgl. $x = 7\frac{1}{5}$ Monate.

130.

Das ganze Kapital ſei x, ſo konnte, nach der Aufgabe, der Schuldner 1376 Thlr. 5 Monate, 2560 Thlr. 8 Monate, und $x - 3936$ Thlr. 13 Monate benutzen, was ihm $1376 \cdot 5 + 2560 \cdot 8 + (x - 3936) \cdot 13$ Intereſſen bringt. Nun ſoll er das ganze Kapital nach 10 Monaten bezahlen, dieſes bringt ihm $10x$ Intereſſen, alſo $10x = 1376 \cdot 5 + 2560 \cdot 8 + (x - 3936) \cdot 13$,

folgl. $x = 7936$ Thlr.

131.

Nach der Aufgabe kann der Schuldner von ſeiner Schuldenmaſſe $2000 \cdot 3\frac{1}{2} + 3500 \cdot 4 + 1500 \cdot 14$ Intereſſen ziehen; gehet er aber den Vorſchlag des Gläubigers ein, und iſt der erſte Termin nach x Monaten, und der zweite $x + 1$ Monat ſpäter, alſo nach $2x + 1$

Monaten, ſo ziehet er $3500x + 3500\,(2x + 1) = 3500\,(3x + 1)$ Intereſſen. Es iſt daher

$$3500\,(3x + 1) = 2000 \cdot 3\tfrac{1}{2} + 3500 \cdot 4 + 1500 \cdot 14,$$

folgl. $x = 3\tfrac{2}{3}$ Monate.

132.

Es iſt einleuchtend, daß ein Kapital von 100 Thlrn. baar, welches jährlich n Thlr. trägt, nach m Jahren $100 + mn$ Thlr. werth iſt. Mithin ſind auch umgekehrt $100 + mn$ Thlr., welche erſt nach m Jahren zahlbar ſind, gegenwärtig baar nur 100 Thlr. werth. Sollen daher die 4340 Thlr., welche erſt nach 8 Jahren zahlbar ſind, ſogleich baar mit 5 Procent Rabatt bezahlt werden, ſo muß man anſetzen: $100 + 8 \cdot 5 : 100 = 4340 : 3100$. Der erſte Käufer bietet alſo an baarer Zahlung $3365 + 3100 = 6465$ Thlr. Nun habe der zweite Käufer x Thlr. geboten, wenn er nämlich das Kaufgeld in Terminalzahlungen, nach der Art, wie es in der Augabe feſtgeſetzt iſt, abtragen kann, und zwar $\frac{x}{3}$ nach zwei Jahren, ferner $\frac{x}{3}$ nach vier Jahren, und endlich $\frac{x}{3}$ nach ſechs Jahren. Sollen nun die $\frac{x}{3}$ Thlr., welche nach zwei Jahren zahlbar ſind, ſogleich baar mit 5 Procent Rabatt gezahlt werden, ſo ſetze man $110 : 100 = \frac{x}{3} : \frac{10x}{33}$. Um ferner zu berechnen, was die $\frac{x}{3}$ Thlr., welche nach vier Jahren zahlbar ſind, an baar mit 5 Procent Rabatt betragen, ſetze man $120 : 100 = \frac{x}{3} : \frac{5x}{18}$. Was endlich die $\frac{x}{3}$ Thlr., welche nach ſechs Jahren zahlbar ſind, betrifft, ſo ſetze man, um den baaren Betrag zu erhalten, $130 : 100 = \frac{x}{3} : \frac{10x}{39}$. Da nun der Verkäufer beide Gebote für gleich erachtet, ſo iſt

$$\frac{10x}{33} + \frac{5x}{18} + \frac{10x}{39} = 6465 \text{ Thlr.},$$

$$\text{folgl. } x = 7722 \text{ Thlr.},$$

das Gebot des zweiten im Falle der Terminalzahlung.

133.

Der Gewinn muß unter A, B, C, nach Verhältniß ihrer Einlagen, multiplicirt mit der Zeit, welche jede Einlage geſtanden hat, vertheilt werden. Da ſich nun die Producte, wie $8 \cdot 1200 : 10 \cdot 800 : 14 \cdot 600$, oder, indem man durchgehends durch 400 dividirt, wie $24 : 20 : 21$ verhalten, ſo ſei der Theil des Gewinnes, den A erhält, $= x$, folglich der Theil von B $= \frac{20x}{24} = \frac{5x}{6}$ und der Theil von C $= \frac{21x}{24} = \frac{7x}{8}$. Es iſt daher

$$x + \frac{5x}{6} + \frac{7x}{8} = 50,$$

$$\text{folgl. } x = 184\tfrac{8}{13} \text{ für A},$$

$$\text{und hieraus } 153\tfrac{11}{13} \text{ für B},$$

$$\text{und } 161\tfrac{7}{13} \text{ für C}.$$

134.

Die drei Theile, welche A, B, C vom Gewinne g erhalten, müſſen ſich, wie al : bm : cn verhalten. Wenn nun der Theil, den A erhält, = x iſt, ſo iſt der Theil von B $= \frac{bmx}{al}$, und der Theil von C $= \frac{cnx}{al}$. Es iſt daher

$$x + \frac{bmx}{al} + \frac{cnx}{al} = g,$$

$$\text{folgl. } x = \frac{alg}{al + bm + cn} \text{ für A,}$$

mithin iſt der Antheil von B $= \frac{bmx}{al} = \frac{bm \frac{alg}{al + bm + cn}}{al}$

$$= \frac{bmalg}{al(al + bm + cn)} = \frac{bmg}{al + bm + cn},$$

und der Antheil von C $= \frac{cnx}{al} = \frac{cn \frac{alg}{al + bm + cn}}{al}$

$$= \frac{cnalg}{al(al + bm + cn)} = \frac{cng}{al + bm + cn}.$$

135.

Die verſchiedenen Einlagen der drei Kaufleute verhalten ſich, wie 17 : 13 : 10. Nennt man alſo den Theil, den der dritte, mit Ausnahme der drei Procente, vom Gewinne erhält, x, ſo erhält der zweite $\frac{13x}{10}$ und der erſte $\frac{17x}{10}$. Da nun der dritte, außer ſeinem verhältnißmäßigen Antheil x, noch 3 Procent dieſes Antheils, d. i. $\frac{3x}{100}$ mehr bekommt, ſo iſt

$$x + \frac{3x}{100} + \frac{13x}{10} + \frac{17x}{10} = 35262\tfrac{1}{2},$$

folgl. $x = 8750$ Thlr.

Addirt man zu dieſer Zahl 3 Procent, d. i. $262\frac{1}{2}$ hinzu, ſo iſt der Antheil des dritten

$= 9012\frac{1}{2}$ Thlr.

Ferner findet man den Antheil des zweiten

$$= \frac{13x}{10} = \frac{13 \cdot 8750}{10} = 11375 \text{ Thlr.},$$

und den Antheil des erſten

$$= \frac{17x}{10} = \frac{17 \cdot 8750}{10} = 14875 \text{ Thlr.}$$

136.

Die Forderungen der drei Gläubiger verhalten ſich, wie 4 : 5 : 7. Nennt man daher den Theil, den der dritte, mit Ausnahme der 25 Procent, von der Verlaſſenſchaft erhält, x, ſo iſt der Antheil des zweiten, ebenfalls mit Ausnahme der 10 Procent, $= \frac{5x}{7}$ und ferner der Antheil des erſten $= \frac{4x}{7}$. Da nun der dritte, außer ſeinem verhältnißmäßigen Theil x, noch 25 Procent dieſes Theils, d. i. $\frac{25x}{100} = \frac{x}{4}$ mehr bekommt, ſo erhält der dritte überhaupt $x + \frac{x}{4}$. Der zweite bekommt außer dem ihm zukommenden Theil $\frac{5x}{7}$ noch 10 Procent dieſes Theils, d. i. $\frac{10 \cdot 5x}{100 \cdot 7} = \frac{x}{14}$, folglich erhält der zweite überhaupt $\frac{5x}{7} + \frac{x}{14}$. Es iſt demnach

$$x + \frac{x}{4} + \frac{5x}{7} + \frac{x}{14} + \frac{4x}{7} = 3139,$$

folgl. $x = 1204$ Thlr.

Addirt man zu dieſer Summe 25 Procent, d. i. 301 hinzu, ſo findet man den Antheil des dritten

$= 1505$ Thlr.

Ferner findet man den Antheil des zweiten

$$= \frac{5x}{7} + \frac{x}{14} = \frac{5 \cdot 1204}{7} + \frac{1204}{14} = 946 \text{ Thlr.},$$

und den Antheil des erſten

$$= \frac{4x}{7} = \frac{4 \cdot 1204}{7} = 688 \text{ Thlr.}$$

137.

Hier iſt das Verhältniß der drei Forderungen $f : g : h$. Geſetzt alſo der dritte erhalte, mit Ausnahme der n Procent, den Theil x, ſo iſt der Antheil des zweiten, ebenfalls mit Ausnahme der m Procent, $= \frac{gx}{h}$, und ferner der Antheil des erſten $= \frac{fx}{h}$. Da nun der dritte, außer ſeinem verhältnißmäßigen Theil x, noch n Procent dieſes Theils, d. i. $\frac{nx}{100}$ mehr bekommt, ſo erhält der dritte überhaupt $x + \frac{nx}{100}$. Der zweite bekommt, außer dem ihm zukommenden Theil $\frac{gx}{h}$, noch m Procent dieſes Theils, d. i. $\frac{mgx}{100h}$ mehr; folglich erhält der zweite überhaupt $\frac{gx}{h} + \frac{mgx}{100h}$. Es iſt daher

$$x + \frac{nx}{100} + \frac{gx}{h} + \frac{mgx}{100h} + \frac{fx}{h} = a,$$

$$\text{folgl. } x = \frac{100ah}{100\,(h+g+f) + gm + hn}.$$

Addirt man zu dieſer Größe n Procent, d. i.

$$\frac{nx}{100} = \frac{n\,\frac{100ah}{100\,(h+g+f)+gm+hn}}{100}$$

$$= \frac{100ahn}{100[100(h+g+f)+gm+hn]} = \frac{ahn}{100\,(h+g+f)+gm+hn}$$

hinzu, ſo findet man den Antheil des dritten

$$\frac{100ah + ahn}{100(h+g+f)+gm+hn} = \frac{(100+n)\,ah}{100(h+g+f)+gm+hn}.$$

Ferner findet man den Antheil des zweiten

$$= \frac{gx}{h} + \frac{mgx}{100h} = \frac{(100g+gm)\,x}{100h}$$

$$= \frac{(100g+gm)\,\frac{100ah}{100\,(h+g+f)+gm+hn}}{100h}$$

$$= \frac{100ah\,(100g+gm)}{100h[100(h+g+f)+gm+hn]} = \frac{(100+m)ag}{100(h+g+f)+gm+hn}$$

und den Antheil des erſten

$$= \frac{fx}{h} = \frac{f\,\dfrac{100ah}{100\,(h+g+f)+gm+hn}}{h}$$

$$= \frac{100afh}{h[100\,(h+f+g)+gm+hn]} = \frac{100af}{100\,(h+f+g)+gm+hn}$$

138.

Die Einlage des A ſei $= x$,

ſo iſt die des B $= \frac{3x}{2}$,

und die des C $= \frac{5x}{2} + 300$.

Dieſe drei verſchiedenen Einlagen verhalten ſich, wie $\frac{2x}{2} : \frac{3x}{2} : \frac{5x+600}{2}$ oder wie $2x : 3x : 5x + 600$. Nun theilt man aber eine Zahl nach einem gegebenen Verhältniſſe, wenn man dieſelbe durch die Summe aller Verhältnißzahlen dividirt, und den Quotienten der Reihe nach mit den einzelnen gegebenen Verhältnißzahlen multiplicirt. Auf dieſe Weiſe findet man den Antheil von C

$$= \frac{5020}{10x+600} \cdot (5x+600).$$

Da nun, nach der Aufgabe, C für ſeinen Antheil 2570 Thlr. erhalten hat, ſo iſt

$$\frac{5020}{10x+600} \cdot (5x+600) = 2570,$$

folgl. $x = 2450$ Thlr. Einlage des A,
und mithin 3675 Thlr. Einlage des B,
und 6425 Thlr. Einlage des C.

139.

Die Einlage des A ſei = x, ſo iſt die des B = x + 320, und nach der Aufgabe iſt die Einlage des C = 5600. Multiplicirt man nun dieſe Einlagen mit ihrer Zeit, ſo erhält man die Verhältnißzahlen $7x : 14x + 4480 : 67200$ oder, durch 7 dividirt, $x : 2x + 640 : 9600$, nach welchen der Gewinn von $2402\frac{1}{6}$ Thlrn. unter A, B, C vertheilt werden muß. Dividirt man daher $2402\frac{1}{6}$ durch die Summe der Verhältnißzahlen, nämlich durch $3x + 10240$, und multiplicirt den Quotienten mit der Verhältnißzahl $2x + 640$, ſo erhält man für den Antheil des B $\frac{2402\frac{1}{6}}{3x + 10240}\cdot(2x + 640)$. Es iſt daher

$$\frac{2402\frac{1}{6}}{3x + 10240}\cdot(2x + 640) = 879\tfrac{2}{3},$$

folgl. x = 3450 Thlr. für A,

und hieraus 3770 Thlr. für B.

140.

Die Zinſen von beiden Kapitalien mögen zu x Procent monatlich gerechnet worden ſein. Die Zinſen von 1100 Thlrn. zu x Procent monatlich betragen in 10 Monaten 110x; mithin haben die vier Kinder überhaupt 1100 + 110x verzehrt. Es hat demnach ein Kind in 10 Monaten $\frac{1100 + 110x}{40}$ und folglich ein Kind in einem Monat $\frac{1100 + 110x}{40}$ verzehrt.

Die Zinſen von 1200 Thlrn. zu x Procent monatlich betragen in 15 Monaten 180x; mithin haben die drei Kinder überhaupt 1200 + 180x verzehrt. Es hat daher ein Kind in 15 Monaten $\frac{1200 + 180x}{3}$ und folglich ein Kind in einem Monat $\frac{1200 + 180x}{45}$ verzehrt. Es iſt alſo

$$\frac{1100 + 110x}{40} = \frac{1200 + 180x}{45},$$

folgl. $x = \frac{2}{3}$ Procent.

Demnach verzehrt ein Kind in einem Monat $\frac{1100+110x}{40}$ $= \frac{1100+110\cdot\frac{2}{3}}{40} = \frac{1173\frac{1}{3}}{40} = \frac{3520}{120} = \frac{88}{3}$ und folgl. verzehren ſechs Kinder in einem Monat $\frac{88 \cdot 6}{3} =$ 176 Thlr. Setzt man daher, um die zweite Frage dieſer Aufgabe zu beantworten, die geſuchte Anzahl der Monate = x, ſo haben die ſechs Kinder in x Monaten 176x Thlr. verzehrt. Nun betragen die Zinſen von 1650 Thlrn., zu $\frac{2}{3}$ Procent monatlich, in x Monaten 11x Thlr. Es iſt daher

$$1650 + 11x = 176x,$$

folgl. x = 10 Monate.

141.

Beide Kapitalien mögen x Procent monatliche Zinſen getragen haben. Es hat daher das Kapital von 4800 in 9 Monaten 432x Thlr. getragen (denn es iſt 100 : 9x = 4800 : 432x), und ein jeder von den fünf Brüdern hat demnach in 9 Monaten $\frac{4800+432x}{5}$ und in einem Monat $\frac{4800 + 432x}{45}$ Thlr. verzehrt. Ferner trägt das Kapital von 3320 Thlrn. in 16 Monaten $531\frac{1}{5}$ Thlr. (denn 100 : 16x = 3320 : $531\frac{1}{5}x$) und eine jede von den zwei Perſonen hat demnach in 16 Monaten $\frac{3320+531\frac{1}{5}x}{2}$ und in einem Monat $\frac{3320 + 531\frac{1}{5}x}{32}$ Thlr. verzehrt. Es iſt daher

$$\frac{4800 + 432x}{45} = \frac{3320 + 531\frac{1}{5}x}{32},$$

folgl. $x = \frac{5}{12}$.

Hieraus ergiebt ſich nun das, was ein jeder monatlich verzehrt hat,

$$= \frac{4800 + 432 \cdot \frac{5}{12}}{45} = 110\tfrac{2}{3} \text{ Thlr.}$$

142.

Die Livree mag zu x Thlrn. gerechnet ſein, ſo iſt der jährliche Lohn = 40 + x, dieſes macht auf einen Monat $\frac{40+x}{12}$ und folgl. auf fünf Monate $\frac{5\,(40+3)}{12}$. Es iſt daher nach der Aufgabe

$$\frac{5\,(40+x)}{12} = x + 6\tfrac{1}{6},$$

folgl. x = 18 Thlr.

143.

Der Scheffel Roggen mag zu x Thlrn. angerechnet worden ſein. Der eine Tagelöhner erhält alſo für 56 Tage 14 + 4x, und folglich für einen Tag $\frac{14 + 4x}{56}$. Der andere Tagelöhner erhält für 84 Tage $17\frac{1}{4} + 7\frac{1}{2}x$, folglich für einen Tag $\frac{17\frac{1}{4} + 7\frac{1}{2}x}{84}$. Es iſt daher

$$\frac{14 + 4x}{56} = \frac{17\frac{1}{4} + 7\frac{1}{2}x}{84} = \frac{69 + 30x}{336},$$

folgl. $x = 2\frac{1}{2}$ Thlr.

144.

Der Friedrichsd'or ſei zu x Thlrn. gerechnet, ſo hat er einmal für 7 Monate $16\frac{11}{12} + 7x$ Thlr. und folglich für einen Monat $\frac{16\frac{11}{12} + 7x}{7}$ erhalten; ein anderes Mal hat er für 9 Monate $44\frac{1}{12} + 5x$, und folglich für einen Monat $\frac{44\frac{1}{12} + 5x}{9}$ erhalten. Es iſt daher

$$\frac{16\frac{11}{12} + 7x}{7} = \frac{44\frac{1}{12} + 5x}{9}$$

oder $152\frac{1}{4} + 63x = 301\frac{7}{12} + 35x$,

folgl. $x = 5\frac{7}{12}$ Thlr.

145.

Er habe x Tage für ſeinen Meiſter, und folglich 50 − x Tage für einen andern gearbeitet, er erhält alſo vom Meiſter 8x Gr. und muß dem Meiſter geben

$(50 - x)\,5$ Gr. Da er nun noch $9\frac{1}{12}$ Thlr. $= 218$ Gr. bezahlt erhält, ſo iſt

$$8x - (50 - x)\,5 = 218,$$

folgl. $x = 36$ Tage.

146.

Er habe anfänglich x Eier gehabt, woraus er $7x$ Pf. gelöſt hätte. Nachdem aber 5 davon zerbrochen wurden, blieben ihm noch $x - 5$ übrig, und dieſe verkauft er zu 8 Pf. das Stück, folglich löſet er daraus $(x - 5)\,8$. Es iſt daher

$$(x - 5)\,8 = 7x,$$

folgl. $x = 40$ Stück Eier.

147.

Er habe x Stück Citronen gekauft, welche ihm $1\frac{1}{2}x$ Gr. gekoſtet haben. Hätte er aber für daſſelbe Geld noch 5 Stück mehr erhalten, ſo würde er $x + 5$ Stück gehabt haben. Da ihm nun alsdann, nach der Aufgabe, das Dutzend nur $15\frac{1}{2}$ Gr., alſo das Stück $\frac{31}{24}$ Gr. gekoſtet hätte, ſo iſt

$$\frac{31}{24}(x + 5) = 1\tfrac{1}{2}x,$$

folgl. $x = 31$ Stück.

148.

Das Stück Tuch mag, nach der Angabe des Verkäufers, x Ellen enthalten ſollen, wofür alſo der Käufer $2\frac{1}{2}x$ Thlr. bezahlt hat. Nun findet ſich, daß das Stück 5 Ellen mehr, alſo $x + 5$ enthält, und daß er die Elle wieder für 2 Thlr. und folglich das ganze Stück für $(x + 5)$ Thlr verkaufen muß. Da er nun bei dieſem Handel $13\frac{1}{3}$ Procent verliert, ſo muß der Einkaufspreis ſich zum Verkaufspreiſe, wie 100 zu $86\frac{2}{3}$ verhalten. Man hat alſo

$$100 : 86\tfrac{2}{3} = 2\tfrac{1}{2}x : 2\,(x + 5),$$

$$\text{und daher } 200x + 1000 = \frac{650x}{3},$$

folgl. $x = 60$ Ellen nach der Angabe ꝛc.

149.

Der Gehalt ſei $= x$; davon wird $\frac{1}{7}$ zum Theater verwendet, folglich bleibt $\frac{6x}{7}$. Wird aber der Gehalt um 100 Thlr. vermehrt, und davon $\frac{1}{5}$ zum Theater verwendet, ſo bleibt $\frac{4(x + 100)}{5}$. Nun iſt, nach der Aufgabe, der letztere Reſt um 40 Thlr. mehr, als der erſtere; es iſt daher

$$\frac{4\,(x + 100)}{5} = \frac{6x}{7} + 40,$$

folgl. $x = 700$ Thlr.

150.

Hier ſoll nur das Verhältniß beider Gehalte, nicht aber die Größe der Gehalte ſelbſt angegeben werden. Es ſei daher der Gehalt vor der Zulage $= x$, und nach derſelben $= y$. Von x verwendet er $\frac{1}{4}$ zu Büchern, es bleiben ihm alſo noch $\frac{3x}{4}$, und von y verwendet er $\frac{1}{3}$ zu demſelben Behufe, es bleiben ihm alſo noch $\frac{2y}{3}$. Es iſt daher, nach der Aufgabe, $\frac{3x}{4} = \frac{2y}{3}$, und hieraus läßt ſich folgende Proportion entwickeln:

$$x : y = \tfrac{2}{3} : \tfrac{3}{4} = 8 : 9.$$

Die Gehaltszulage beträgt alſo $\frac{1}{8}$ des vorigen Gehalts.

151.

Auch hier verlangt man nur das Verhältniß beider Miethen, nicht aber die Miethen ſelbſt zu wiſſen. Es ſei daher der Miethzins vor der Steigerung $= x$ und nach derſelben $= y$. Von x mußte der Wirth $\frac{1}{7}$ contribuiren, es blieb ihm alſo $\frac{6x}{7}$ übrig; von y muß er $\frac{1}{6}$ contribuiren, es bleibt ihm alſo noch $\frac{5y}{6}$. Es iſt daher, nach der Aufgabe, $\frac{6x}{7} = \frac{5y}{6}$, und hieraus läßt ſich folgende Proportion ableiten:

$$x : y = \tfrac{5}{6} : \tfrac{6}{7} = 35 : 36.$$

Der bisherige Miethzins muß daher um $\frac{1}{35}$ geſteigert werden.

152.

Die Summe Geldes mag anfänglich x Thlr. betragen haben. Nimmt man hiervon $\frac{1}{3}$ weg und legt 50 Thlr. zu, ſo erhält man $\frac{2x}{3} + 50$. Hiervon $\frac{1}{4}$ weggenommen und 70 zugelegt, giebt $\frac{3\left(\frac{2x}{3}+50\right)}{4}+70$; und dies ſoll, nach der Aufgabe, 120 Thlr. betragen. Es iſt daher

$$\frac{3\left(\frac{2x}{3}+50\right)}{4}+70=120$$

oder $$\frac{2x+150}{4}+70=120,$$

folgl. $x = 25$ Thlr.

153.

Die Summe ſei anfänglich $= x$. Hiervon wird die Hälfte und 50 Thlr. weggenommen, es bleibt alſo $\frac{x}{2}-50=\frac{x-100}{2}$ übrig. Hiervon wird ferner der fünfte Theil und 30 Thlr. weggenommen, es bleibt alſo

$$\frac{4\cdot\frac{x-100}{2}}{5}-30=\frac{4x-400-300}{10}=\frac{4x-700}{10}.$$

Hiervon wird abermals der vierte Theil und 20 Thlr. weggenommen, es bleibt alſo $\frac{3\cdot\frac{4x-700}{10}}{4}-20=$

$\frac{6x-1050-400}{20}=\frac{6x-1450}{20}$. Es iſt daher, nach der Aufgabe,

$$\frac{6x-1450}{20}=10,$$

folgl. $x = 275$ Thlr.

154.

Das Legat betrage x Thlr. Der Kammerdiener erhält 200 Thlr. $+ \frac{x - 200}{2} = \frac{x + 200}{2}$. Der Koch bekommt $\frac{x - \frac{x + 200}{2}}{5} + 400 = \frac{x + 3800}{10}$. Es iſt demnach

$$\frac{x + 200}{2} + \frac{x + 3800}{10} + 520 = x,$$

folgl. $x = 2500$ Thlr.

155.

Er habe x Eier nach der Stadt gebracht. Hiervon verkauft er $\frac{x}{2} + 4$, es bleiben alſo noch $\frac{x}{2} - 4$. Nun verkauft er die Hälfte, das iſt $\frac{x}{4} - 2$, und noch 2 darüber, oder überhaupt $\frac{x}{4} - 2 + 2 = \frac{x}{4}$; dieſes von $\frac{x}{2} - 4$ abgezogen, bleiben ihm noch $\frac{x}{4} - 4$. Hiervon muß ferner, nach der Aufgabe, $\frac{x}{8} - 2 + 6 = \frac{x}{8} + 4$, welche Anzahl Eier ihm geſtohlen worden, abgezogen werden, ſo bleiben $\frac{x}{8} - 8$. Es iſt daher

$$\frac{x}{8} - 8 = 2,$$

folgl. $x = 80$ Eier.

156.

Das Vermögen mag anfänglich x Thlr. betragen haben. Nach Verlauf des erſten Jahres wird es um $\frac{1}{3}$ vermehrt und 1000 Thlr. davon genommen; das Vermögen iſt alſo am Ende des erſten Jahres $= \frac{4x}{3} - 1000 = \frac{4x-3000}{3}$. Dieſes um $\frac{1}{3}$ vermehrt, giebt $\frac{4x-3000}{3} + \frac{4x-3000}{9} = \frac{12x-9000+4x-3000}{9} = \frac{16x-12000}{9}$. Hiervon 1000 weggenommen, bleiben am Ende des zweiten Jahres $\frac{16x-12000}{9} - 1000 = \frac{16x-12000-9000}{9} = \frac{16x-21000}{9}$. Dieſen Reſt abermals um $\frac{1}{3}$ vermehrt, giebt $\frac{16x-21000}{9} + \frac{16x-21000}{27} = \frac{48x-63000+16x-21000}{27} = \frac{64x-84000}{27}$. Hiervon 1000 Thlr. weggenommen, bleiben am Ende des dritten Jahrs $\frac{64x-84000}{27} - 1000 = \frac{64x-84000-27000}{27} = \frac{64x-111000}{27}$. Es iſt daher

$$\frac{64x-111000}{27} = 2x,$$

folgl. $x = 11100$ Thlr.

157.

Das anfängliche Vermögen mag $= x$ ſein. Nach Verlauf des erſten Jahres vermehrt er ſelbiges um 20 Procent, das heißt um $\frac{1}{5}x$, und nimmt 1000 Thlr. davon weg; es bleibt alſo am Ende des erſten Jahres $\frac{6x}{5} - 1000 = \frac{6x - 5000}{5}$. Dieſes um $\frac{1}{5}$ vermehrt, giebt $\frac{6x-5000}{5} + \frac{6x-5000}{25} = \frac{30x-25000+6x-5000}{25}$ $= \frac{36x - 30000}{25}$. Hiervon 1000 abgezogen, bleibt am Ende des zweiten Jahres $\frac{36x - 30000}{25} - 1000$ $= \frac{36x - 30000 - 25000}{25} = \frac{36x - 55000}{25}$. Dieſen Reſt abermals um $\frac{1}{5}$ vermehrt, giebt $\frac{36x - 55000}{25}$ $+ \frac{36x - 55000}{125} = \frac{180x - 275000 + 36x - 55000}{125}$ $= \frac{216x - 330000}{125}$. Hiervon 1000 abgezogen, bleibt am Ende des dritten Jahres $\frac{216x - 330000}{125} - 1000$ $= \frac{216x - 330000 - 125000}{125} = \frac{216x - 455000}{125}$. Dieſer Reſt ſoll nun, nach der Aufgabe, nicht allein $\frac{3}{5}$, ſondern noch 200 Thlr. mehr betragen, als ſein anfängliches Vermögen. Es iſt daher

$$\frac{216x - 455000}{125} = x + \frac{3x}{5} + 200,$$

folgl. $x = 30000$.

158.

Er habe x Aepfel nach Hauſe gebracht. Davon erhält der älteſte Sohn $\frac{x}{2} - 8$, es bleiben alſo $\frac{x}{2} + 8$. Hierauf nimmt der zweite $\frac{x}{4} + 4 - 8 = \frac{x}{4} - 4$, es bleiben alſo $\frac{x}{4} + 12$. Der dritte nimmt hiervon $\frac{x}{8} + 6 - 8 = \frac{x}{8} - 2$, es bleiben daher $\frac{x}{8} + 14$. Endlich nimmt der vierte hiervon $\frac{x}{16} + 7 - 8 = \frac{x}{16} - 1$, es bleiben demnach für den fünften $\frac{x}{16} + 15$. Es iſt daher

$$\frac{x}{16} + 15 = 20,$$

$$\text{folgl. } x = 80.$$

159.

Die Zahl ſei x, ſo iſt

$$2\tfrac{1}{2}\,(3\tfrac{3}{7}x - 60) - 30 = 0,$$

$$\text{folgl. } x = 21.$$

160.

Er habe anfänglich x Thlr. gehabt. Dieſe tragen zu 4 Procent in 2 Jahren $\frac{2x}{25}$ Thlr. Intereſſen; denn es iſt $100 : 8 = x : \frac{2x}{25}$. Nimmt er nun $\frac{1}{4}$ vom Kapital hinweg, ſo bleibt $\frac{3x}{4}$, und dieſe tragen in einem

Jahre $\frac{3x}{100}$ Intereſſen; denn es iſt $100 : 4 = \frac{3x}{4} : \frac{3x}{100}$; folglich trägt die letztere Summe in 7 Monaten $\frac{7 \cdot 2x}{12 \cdot 100}$ $= \frac{7x}{400}$; denn es iſt $12 : \frac{3x}{100} = 7 : \frac{7 \cdot 3x}{12 \cdot 100}$. Nimmt er endlich abermals von $\frac{3x}{4}$ ein Viertel hinweg, ſo bleibt $\frac{3 \cdot 3x}{4 \cdot 4} = \frac{9x}{16}$, und dieſe tragen in einem Jahre $\frac{9x}{16 \cdot 25}$, folgl. in 13 Monaten $\frac{13 \cdot 9x}{12 \cdot 16 \cdot 25} = \frac{39x}{1600}$. Die ſämmtlichen Intereſſen betragen alſo $\frac{2x}{25} + \frac{7x}{400}$ $+ \frac{39x}{1600}$. Es iſt daher

$$\frac{2x}{25} + \frac{7x}{400} + \frac{39x}{1600} = 6093\tfrac{3}{4},$$

$$\text{folgl. } x = 50000.$$

161.

Das hinterlaſſene Vermögen ſei = x, ſo bekommt das erſte Kind 100 Thlr. und noch vom Reſte x — 100 den zehnten Theil; der Antheil des erſten iſt demnach $\frac{x - 100}{10} + 100 = \frac{x - 100 + 1000}{10} = \frac{x + 900}{10}$. Nun ziehe man den Antheil des erſten von x ab, ſo bleibt $x - \frac{x + 900}{10} = \frac{10x - x - 900}{10} = \frac{9x - 900}{10}$. Hiervon bekommt das zweite Kind 200 Thlr. und

$\frac{1}{10}$ des Reſtes, d. i. $200 + \frac{\frac{9x - 900}{10} - 200}{10}$ $= \frac{9x - 900 - 2000}{100} + 200 = \frac{9x - 900 - 2000 + 20000}{100}$ $= \frac{9x + 17100}{100}$. Da nun, nach der Aufgabe, alle Kinder gleich viel bekommen, ſo iſt

$$\frac{x + 900}{10} = \frac{9x + 17100}{100},$$

folgl. $x = 8100$ Thlr.

Subſtituirt man dieſen Werth für x in $\frac{x + 900}{10}$, ſo erhält man den Antheil des erſten $= \frac{8100 + 900}{10}$ $= 900 =$ dem Antheil eines jeden Kindes. Die Anzahl der Kinder iſt daher $\frac{8100}{900} = 9$.

162.

Das hinterlaſſene Vermögen ſei x, ſo bekommt das erſte Kind 30 Thlr. und noch den neunten Theil des Reſtes $x - 30$; der Antheil des erſten iſt demnach $\frac{x - 30}{9} + 30 = \frac{x - 30 + 270}{9} = \frac{x + 240}{9}$. Zieht man den Antheil des erſten von x ab, ſo bleibt $x - \frac{x + 240}{9} = \frac{9x - x - 240}{9} = \frac{8x - 240}{9}$. Hiervon bekommt das zweite Kind 60 Thlr. und $\frac{1}{9}$ des Reſtes, d. i. $60 + \frac{\frac{8x - 240}{9} - 60}{9} = 60 +$

$$\frac{8x-240-540}{81}=\frac{8x-240-540+4860}{81}=\frac{8x+4080}{81}.$$

Da nun, nach der Aufgabe, alle Kinder gleich viel erhalten, ſo iſt

$$\frac{x+240}{9}=\frac{8x+4080}{81},$$

folgl. $x = 1920$.

Subſtituirt man dieſen Werth für x in $\frac{x+240}{9}$, ſo erhält man den Antheil des erſten $= \frac{1920+240}{9}$ $= 240 =$ dem Antheil eines jeden Kindes. Die Anzahl der Kinder iſt daher $\frac{1920}{240} = 8$.

163.

Das hinterlaſſene Vermögen ſei $= x$, ſo bekommt das erſte Kind a und noch vom Reſte $x-a$ den $n$ten Theil. Der Antheil des erſten iſt demnach $\frac{x-a}{n}+a$ $=\frac{x-a+an}{n}$. Nun ziehe man den Anzahl des erſten von x ab, ſo bleibt $x - \frac{x-a+an}{n} = \frac{nx-x+a-an}{n}$.

Hiervon bekommt das zweite Kind $2a$ und $\frac{1}{n}$ des Reſtes, d. i. $2a + \frac{\frac{nx-x+a-an}{n}-2a}{n}$

$$=\frac{nx-x+a-3an}{n^2}+2a=\frac{nx-x+a-3an+2an^2}{n^2}.$$

Es iſt demnach

$$\frac{x - a + an}{n} = \frac{nx - x + a - 3an + 2an^2}{n^2},$$

folgl. $x = an^2 - 2an + a = a(n^2 - 2n + 1) = a(n-1)^2$ Subſtituirt man dieſen Werth für x in $\frac{x - a + an}{n}$, ſo erhält man den Antheil eines jeden Kindes $= \frac{a(n-1)^2 - a + an}{n} = \frac{an^2 - 2an + a - a + an}{n} = \frac{an^2 - an}{n} = \frac{an(n-1)}{n} = a(n-1)$. Die Anzahl der Kinder iſt daher $\frac{a(n-1)^2}{a(n-1)} = n - 1$.

164.

Man nehme an, der General habe beim erſten Mal x Mann zur Seite des Quadrats gewählt. Die Anzahl der Mannſchaft, welche in ein ſolches Quadrat geſtellt werden kann, iſt $= x^2$. Da ihm aber bei dieſer Stellung 39 Mann übrig bleiben, ſo muß das ganze Regiment $x^2 + 39$ Mann ſtark ſein. Wählt er ferner zur Seite ſeines Quadrats $x + 1$ Mann, ſo iſt die Anzahl der Mannſchaft, welche in ein ſolches Quadrat geſtellt werden kann, $= (x+1)^2$. Da ihm aber alsdann 50 Mann zur Ergänzung des Quadrats fehlen, ſo muß das ganze Regiment $(x + 1)^2 - 50$ Mann ſtark ſein. Es iſt demnach

$$x^2 + 39 = (x + 1)^2 - 50,$$

folgl. $x = 44$ Mann,

welche er anfänglich zur Seite ſeines Quadrats wählte. Hieraus ergiebt ſich die ganze Stärke des Regiments

$$= 44^2 + 39 = 1975 \text{ Mann.}$$

165.

Die Anzahl Thaler, welche er zuerſt in eine Reihe legt, mögen $= x$ ſein. Die Anzahl Thaler, welche in ein ſolches Quadrat gelegt werden können, iſt $= x^2$. Da ihm nun in dieſem Falle 130 Thlr. übrig bleiben, ſo iſt die geſuchte Anzahl Thaler $= x^2 + 130$. Macht er ferner $x + 3$ zur Seite eines Quadrats, ſo iſt die Anzahl Thaler, welche zu dieſem Quadrate gebraucht werden, $= (x + 3)^2$; da ihm aber alsdann nur 31 Thlr. übrig bleiben, ſo ſind ſämmtliche Thaler $= (x + 3)^2 + 31$. Es iſt demnach

$$(x + 3)^2 + 31 = x^2 + 130,$$

$$\text{folglich } x = 15 \text{ Thaler,}$$

welche er anfänglich zur Seite ſeines Quadrats wählte. Hieraus erhält man die geſuchte Anzahl Thaler

$$= 15^2 + 130 = 355.$$

166.

Die zu ſuchende Zahl ſei x, ſo iſt

$$(a + x)^2 - (b + x)^2 = d$$

$$\text{oder } a^2 + 2ax + x^2 - b^2 - 2bx - x^2 = d,$$

$$\text{folgl. } x = \frac{d - a^2 + b^2}{2(a - b)}.$$

167.

Das erſte Faß enthalte x Quart. Nun kann das erſte Faß nur $\frac{7}{9}$ des zweiten Faſſes in ſich aufnehmen; folglich enthält das zweite Faß 9 ſolcher Theile, deren das erſte nur 7 aufnehmen kann. Das zweite Faß enthält demnach $\frac{9x}{7}$. Ferner kann das zweite Faß nur $\frac{3}{4}$ des dritten Faſſes in ſich aufnehmen; folglich enthält das dritte Faß 4 ſolcher Theile, davon das zweite nur 3 enthält. Das dritte Faß enthält demnach $\frac{4}{3} \cdot \frac{9x}{7} = \frac{12x}{7}$. Da nun zur Füllung des dritten Faſſes aus dem erſten Faſſe noch 50 Quart fehlen, ſo giebt auch $x + 50$ die Anzahl Quart des dritten Faſſes an. Es iſt demnach

$$\frac{12x}{7} = x + 50,$$

folgl. $x = 70$ Quart für das erſte Faß,
und hieraus 90 Quart für das zweite Faß,
und 120 Quart für das dritte Faß.

168.

Daß erſte Faß enthalte x Quart. Nun kann das zweite Faß nur $\frac{3}{7}$ des erſten Faſſes in ſich aufnehmen, das zweite Faß enthält alſo $\frac{3x}{7}$. Ferner enthält das dritte Faß $\frac{3}{4}$ des zweiten Faſſes $= \frac{3}{4} \cdot \frac{3x}{7} = \frac{9x}{28}$. Das vierte Faß enthält, da nur $\frac{9}{16}$ desſelben aus dem dritten Faſſe gefüllt werden kann, 7 ſolcher Theile mehr, deren das dritte 9 enthält, d. h. es enthält $\frac{16}{9} \cdot \frac{9x}{28} = \frac{4x}{7}$. Da nun das dritte und vierte Faß zuſammen $\frac{9x}{28} + \frac{4x}{7} = \frac{25x}{28}$ enthalten, und dieſe beiden Fäſſer, nach der Aufgabe, zuſammen das erſte Faß weniger 15 Quart aufnehmen können, ſo iſt

$$\frac{25x}{28} = x - 15,$$

folgl. $x = 140$ Quart für das erſte Faß,
und hieraus 60 Quart für das zweite,
45 Quart für das dritte,
80 Quart für das vierte.

VII.

Auflöſung der Aufgaben für die Gleichungen des erſten Grades mit mehreren unbekannten Größen.

(Zu M. Hirſch, Sammlung von Beiſpielen, XVI. Kapitel, von S. 204 bis 224.)

1.

Die beiden Zahlen mögen x und y ſein, ſo iſt

$$x + y = 70,$$

und $x - y = 16$,

folgl. $x = \frac{70 + 16}{2} = 43$, und $y = \frac{70 - 16}{2} = 27$.

2.

Hier iſt $x + y = a$,

und $x - y = b$,

folgl. $x = \frac{a + b}{2}$, und $y = \frac{a - b}{2}$.

3.

In dem einen Geldbeutel mögen x und in dem andern y Thlr. enthalten ſein, ſo iſt

$$x + y = 300,$$

$$\text{und } x - 30 = y + 30$$
$$\text{oder } x - y = 60,$$
$$\text{folgl. } x = \frac{300 + 60}{2} = 180 \text{ Thlr.}$$
$$\text{und } y = \frac{300 - 60}{2} = 120 \text{ Thlr.}$$

4.

A habe x und B y Thlr., ſo iſt

$$x + 100 = y - 100$$
$$\text{oder I. } x - y = -200.$$

Ferner iſt $y + 100 = 2\,(x - 100) = 2x - 200$

$$\text{oder II. } y - 2x = -300.$$

Addirt man (I.) und (II.), ſo findet man

$$-x = -500 \text{ oder } x = 500 \text{ Thlr.}$$

Multiplicirt man (I.) mit 2, was

$$\text{III. } 2x - 2y = -400$$

giebt, und addirt (II.) und (III.), ſo iſt

$$-y = -700 \text{ oder } y = 700 \text{ Thlr.}$$

5.

Eine von beiden Tabatieren ſei x Thlr. und die andere y Thlr. werth, ſo iſt

$$x + 8 = \frac{y}{2} \text{ oder I. } x - \frac{y}{2} = -8.$$

Ferner iſt $y + 8 = 3x$ oder II. $y - 3x = -8$.

Multiplicirt man (I.) mit 3 und addirt (II.) hinzu, ſo iſt

$$-\frac{y}{2} = -32, \text{ folgl. } y = 64 \text{ Thlr.}$$

Dieſen Werth von y in (II.) ſubſtituirt, giebt

$$x = 24 \text{ Thlr.}$$

6.

A beſitze x Thlr. und B y Thlr., ſo iſt

$$\text{I. } x + y = 570,$$

$$\text{und II. } 3x + 5y = 2350.$$

Die Gleichung (I.) mit 3 multiplicirt und von (II.) abgezogen, giebt

$$2y = 640, \text{ folgl. } y = 320 \text{ Thlr.}$$

Dieſen Werth für y in (I.) ſubſtituirt, giebt

$$x = 250 \text{ Thlr.}$$

7.

Die beiden Zahlen mögen x und y ſein, ſo iſt

$$\text{I. } 2x + 5y = 31,$$

$$\text{und II. } 7x + 4y = 68.$$

Aus (I.) erhält man $x = \frac{31 - 5y}{2}$.

Dieſen Werth in (II.) ſubſtituirt, giebt

$$7 \cdot \frac{31 - 5y}{2} + 4y = 68,$$

$$\text{folgl. } y = 3,$$

$$\text{und } x = \frac{31 - 5 \cdot 3}{2} = 8.$$

8.

Die Zahlen ſeien abermals x und y, ſo iſt

$$\text{I. } ax + by = k,$$

$$\text{II. } a'x + b'y = k'.$$

Aus (I.) ergiebt ſich $x = \frac{k - by}{a}$.

Subſtituirt man dieſen Werth in (II.), ſo erhält man

$$a' \frac{k - by}{a} + b'y = k'$$

oder $a'k - a'by + ab'y = ak'$,

folgl. $y = \frac{ak' - a'k}{ab' - a'b}$ ꝛc.

9.

Die Zahlen ſeien x und y. Es iſt alſo

$x + 4 = \frac{13y}{4}$ oder I. $4x - 13y = -16$,

und $y + 8 = \frac{x}{2}$ oder II. $2y - x = -16$.

Multiplicirt man (II.) mit 4 und addirt (I.) hinzu, ſo iſt

$-5y = -80$, folgl. $y = 16$.

Dieſen Werth in (II.) ſubſtituirt, giebt

$$x = 48.$$

10.

Die Zahlen ſeien x und y. Es iſt daher

$x + a = my$ oder I. $x - my = -a$,

und $y + b = nx$ oder II. $y - nx = -b$.

Multiplicirt man (I.) mit n und addirt (II.) hinzu ſo iſt

$$y - mny = -an - b$$

oder $(mn - 1)\, y = an + b$,

folgl. $y = \frac{an + b}{mn - 1}$.

Multiplicirt man (II.) mit m und addirt (I.) hinzu, ſo findet man auf eine ähnliche Art

$$x = \frac{a + bm}{mn - 1}.$$

11.

Der Vater ſei x und der Sohn y Jahr alt, ſo war vor 6 Jahren der Vater x — 6 und der Sohn y — 6 Jahr alt. Es iſt daher

$$x - 6 = 3\,(y - 6) + \frac{y - 6}{3}$$

oder $3\,(x - 6) = 9\,(y - 6) + y - 6 = 10\,(y - 6)$

oder I. $3x - 10y = 18 - 60 = -42.$

Ferner iſt $x + 3 = (y + 3)\,2\frac{1}{6} = \frac{13y}{6} + \frac{13}{2}$

oder II. $x - \frac{13y}{6} = \frac{13}{2} - 3 = \frac{7}{2}.$

Multiplicirt man (II.) mit 3, was

$$\text{III. } 3x - \frac{13y}{2} = \frac{21}{2}$$

giebt, und ſubtrahirt (III.) von (I.), ſo bleibt

$$-\frac{7y}{2} = -\frac{105}{2} \text{ oder } 7y = 105,$$

folgl. y = 15 Jahr, das Alter des Sohnes, und hieraus x = 36 Jahr, das Alter des Vaters.

12.

A war x und B y Thlr. reich, ſo iſt

$$\text{I. } x + y = 9800.$$

Ferner iſt $\frac{5x}{6} = \frac{4y}{5}$ oder $25x = 24y$

oder II. $25x - 24y = 0$.

Multiplicirt man (I.) mit 25, was

$$25x + 25y = 245000$$

giebt, und ziehet hiervon (II.) ab, ſo bleibt

$$49y = 245000,$$

folgl. $y = 5000$ Thlr.

und hieraus $x = 4800$ Thlr.

13.

Das Vermögen des A ſei $= x$ und das des $B = y$,

ſo iſt $x + \frac{y}{8} = 1200$ oder I. $8x + y = 9600$,

und $y + \frac{x}{6} = 2550$ oder II. $6y + x = 15300$.

Multiplicirt man (II.) mit 8 und ziehet (I.) davon ab, ſo bleibt $47y = 112800$,

folgl. $y = 2400$ Thlr. das Vermögen des B,

und hieraus $x = 900$ Thlr. das Vermögen des A.

14.

Die Procente, wofür er Geld aufgenommen hat, ſeien $= x$, und die, wofür er verliehen hat, $= y$, ſo iſt

$$100 : x = 8000 : 80x$$

und $100 : y = 23000 : 230y$,

alſo I. $230y = 80x + 905$.

Ferner iſt $100 : x = 9400 : 94x$

und $100 : y = 17500 : 175y$,

alſo II. $175y = 94x + 539\frac{1}{2}$.

Aus den Gleichungen (I.) und II.) ergiebt ſich

$$y = \frac{80x + 905}{230} = \frac{94x + 539\frac{1}{2}}{175}$$

$$\text{oder } 2800x + 31675 = 4324x + 24817,$$

$$\text{folgl. } x = 4\tfrac{1}{2} \text{ Procent ꝛc.}$$

15.

Das eine Stück Eiſen wiege x Pfund, das andere y Pfund, ſo iſt

$$\frac{2x}{5} + 96 = \frac{3y}{4} \text{ oder I. } 8x - 15y = - 1920,$$

$$\text{ferner } \frac{5y}{8} = \frac{4x}{9} \text{ oder II. } 45y - 32x = 0.$$

Multiplicirt man (I.) mit 4 und addirt (II.) hinzu, ſo iſt

$$- 15y = -- 7680,$$

folgl. y = 512 Pfund Gewicht des erſten Stückes und x = 720 Pfund Gewicht des zweiten Stückes.

16.

Die erſte Oeffnung gebe x und die zweite y Eimer in einer Stunde, ſo iſt

$$\text{I. } 4x + 5y = 90,$$

$$\text{II. } 7x + 3\tfrac{1}{2}y = 126.$$

Multiplicirt man (I.) mit 7 und (II.) mit 4, ſo erhält man die Gleichungen

$$\text{III. } 28x + 35y = 630,$$

$$\text{IV. } 28x + 14y = 504.$$

Subtrahirt man (IV.) von (III.), ſo bleibt

$21y = 126$,

folgl. $y = 6$ Eimer in einer Stunde,

und $x = 15$ Eimer in einer Stunde.

Es laufen alſo durch beide Oeffnungen zuſammen in einer Stunde $15 + 6 = 21$ Eimer. Da nun der Waſſerbehälter 210 Eimer aufnehmen kann, ſo wird er, wenn das Waſſer durch beide Oeffnungen zugleich fließt, in 10 Stunden gefüllt.

17.

Er habe x Siebzehner und y Siebener, ſo iſt

I. $x + y = 500$

und II. $17x + 7y = 112$ Fl. 40 Kr. $= 6760$ Kr.

Multiplicirt man (I.) mit 7 und ziehet dieſe Gleichung von (II.) ab, ſo bleibt

$10x = 3260$,

folgl. $x = 326$ Siebzehner

und $y = 174$ Siebener.

18.

Das Pfund von der erſten Waare koſte x Gr. und von der zweiten y Gr., ſo iſt

I. $8x + 19y = 437$.

Ferner $20x + 16y = 620$

oder II. $5x + 4y = 155$.

Multiplicirt man (I.) mit 5 und (II.) mit 8, ſo erhält man

III. $40x + 95y = 2185$,

IV. $40x + 32y = 1240$.

Subtrahirt man (IV.) von (III.), ſo bleibt

$$63y = 945,$$

folgl. $y = 15$ Gr. Preis eines Pfundes von der erſten Waare,

und alſo $x = 19$ Gr. Preis eines Pfundes von der zweiten Waare.

19.

Eine Schleſiſche Elle mag $= x$ Brab. Ellen, und eine Leipziger mag $= y$ Brab. Ellen ſein, ſo ſind 15 Schleſiſche $= 15x$ Brab. und 33 Leipz. $= 33y$ Brab. Es iſt alſo

$$\text{I.}\quad 15x + 33y = 39\tfrac{1}{2} \text{ Brab. Ellen,}$$

$$\text{II.}\quad 25x + 55y = 65 \text{ Brab. Ellen.}$$

Multiplicirt man (I.) mit 8 und (II.) mit 5, ſubtrahirt die Gleichungen von einander, und beſtimmt y, ſo erhält man

$$y = \tfrac{9}{11} \text{ Brab. Ellen.}$$

Es verhält ſich alſo die Leipziger Elle zur Brabanter Elle, wie 9 : 11.

Subſtituirt man den Werth von y in (I.), ſo erhält man

$$x = \tfrac{5}{6} \text{ Brab. Ellen.}$$

Folglich verhält ſich die Schleſiſche Elle zur Brabanter Elle, wie 5 : 6.

Nun iſt

$$\begin{array}{rl} & \text{Leipz. : Brab.} = 9 : 11 \\ & \underline{\text{Brab. : Schleſ.} = 6 : 5,} \\ \text{folgl.} & \text{Leipz. : Schleſ.} = 6 \cdot 9 : 11 \cdot 5 = 54 : 55. \end{array}$$

Da nun endlich

$$54 : 55 = 100 : 101\tfrac{23}{27},$$

ſo iſt die Schleſiſche Elle um $1\frac{23}{27}$ Procent größer, als die Leipziger Elle.

20.

Ein Danziger Fuß ſei = x Rheinl. und ein Berliner = y Rheinl., ſo ſind $17\frac{1}{2}$ Danziger = $17\frac{1}{2}x$ Rheinl. und 19 Berl. = 19y Rheinl. Es iſt daher

$$\text{I.}\quad 17\tfrac{1}{2}x + 19y = 34\tfrac{3}{4} \text{ Rheinl. Fuß,}$$

$$\text{II.}\quad 5x + 9\tfrac{1}{2}y = 13\tfrac{53}{56} \text{ Rheinl. Fuß.}$$

Man multiplicire (I.) mit 2 und (II.) mit 7, ſubtrahire ſie hierauf und beſtimme y, ſo erhält man

$$y = \tfrac{75}{76} \text{ Rheinl. Fuß.}$$

Es verhält ſich alſo der Berl. Fuß zum Rheinländiſchen, wie 75 : 76.

Subſtituirt man den Werth von y in (I.), ſo erhält man

$$x = \tfrac{32}{35} \text{ Rheinl. Fuß.}$$

Folglich verhält ſich der Danziger Fuß zum Rheinländiſchen, wie 32 : 35. Nun iſt

$$\begin{array}{l} \text{Berlin. : Rheinl.} = 75 : 76 \\ \text{Rheinl. : Danz.} = 35 : 32 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{folgl. Berl. : Danz.} = 75 \cdot 35 : 76 \cdot 32 = 2625 : 2432.$$

Da nun endlich

$$2432 : 2625 = 100 : 107\tfrac{1138}{1216},$$

ſo iſt der Berliner Fuß um $7\frac{1138}{1216}$ oder ungefähr um $7\frac{14}{15}$ Procent länger, als der Danziger.

21.

Eine Franz. Meile ſei = x Deutſchen Meilen, und eine Engl. = y Deutſchen Meilen, ſo ſind 40 Franz. Meilen = 40x Deutſchen Meilen, und 53 Engl. Meilen = 53y Deutſchen Meilen. Es iſt daher

$$40x = 53y + 12\tfrac{1}{2}$$

$$\text{oder I. } 48x - 53y = 12\tfrac{1}{2},$$

$$\text{und II. } 10x + 26\tfrac{1}{2}y = 11\tfrac{3}{4}.$$

Multiplicirt man (II.) mit 2, addirt (I.) hinzu und beſtimmt x, ſo erhält man

$$x = \tfrac{3}{5} \text{ Deutſche Meilen.}$$

Es verhält ſich alſo die Franz. zur Deutſchen Meile, wie 3 : 5.

Subſtituirt man den Werth von y in (I.) und beſtimmt y, ſo erhält man

$$y = \tfrac{23}{106} \text{ Deutſche Meilen.}$$

Es verhält ſich alſo die Engliſche zur Deutſchen Meile, wie 23 : 106. Da nun

$$\begin{array}{lcr} \text{die Engl. M. : Deut. M.} & = & 23 : 106 \\ \text{und die Deut. M. : Franz. M.} & = & 5 : 3 \\ \hline \text{ſo iſt die Engl. M. : Franz. M.} & = & 115 : 318. \end{array}$$

22.

Der Friedrichsd'or ſei x Thlr. und der Dukaten y Thlr. werth, ſo iſt

$$250x = 439y + \tfrac{7}{12} \text{ Thlr.}$$

$$\text{und } 160x = 281y + 6$$

$$\text{oder I. } 250x - 439y = \tfrac{7}{12}$$

$$\text{und II. } 160x - 281y = 6.$$

Multiplicirt man (I.) mit 16 und (II.) mit 25, ziehet beide Gleichungen von einander ab und beſtimmt y, ſo erhält man

$y = 3\frac{1}{12}$ Thlr. = 3 Thlr. 2 Gr. für den Werth eines Dukatens.

Subſtituirt man dieſen Werth für y in (II.) und beſtimmt x, ſo erhält man

$x = 5\frac{5}{12}$ Thlr. = 5 Thlr. 10 Gr. für den Werth eines Friedrichsd'or.

23.

Der Livre ſei zu x Thlrn. und das Pf. Sterl. zu y Thlrn. gerechnet. Da er nun in Deutſchland 1520 Thlr. verzehrt hat, ſo iſt

I. $7540x + 820y = 8325 - 1520 = 6805$ Thlr.

Ferner iſt $5y = 108x + 3$

oder II. $108x - 5y = -3$.

Multiplicirt man (II.) mit 164, addirt (I.) hinzu und beſtimmt x, ſo erhält man

$x = \frac{1}{4}$ Thlr. = 6 Gr.

Subſtituirt man dieſen Werth von x in (II.) und beſtimmt y, ſo erhält man

$y = 6$ Thlr.

24.

Das erſte Pferd ſei x Thlr. und das zweite y Thlr. werth. Legt er den beſſern Sattel auf das Pferd, welches x Thlr., und den ſchlechtern auf das, welches y Thlr. koſtet, ſo iſt das erſtere $x + 50$ Thlr. und das andere $y + 2$ Thlr. werth. Es iſt daher

$$x + 50 = y + 2 + 8 = y + 10$$

oder I. $x - y = -40$.

Verwechſelt er aber die Sättel, ſo iſt das erſtere $x + 2$ Thlr. und das andere $y + 50$ Thlr. werth. Es iſt demnach

$$3\tfrac{3}{4}\,(x + 2) = y + 50$$

oder II. $3\tfrac{3}{4}x - y = 50 - 7\tfrac{1}{2} = 42\tfrac{1}{2}$.

Subtrahirt man (I.) von (II.) und beſtimmt x, ſo erhält man

$x = 30$ Thlr.

Subſtituirt man dieſen Werth von x in (I.) und beſtimmt y, ſo erhält man

$y = 70$ Thlr.

25.

Der Zähler des geſuchten Bruches ſei $= x$ und der Nenner $= y$, ſo iſt

$$\frac{x + 1}{y} = \tfrac{1}{3}$$

oder I. $3x - y = -3$.

Ferner iſt $\dfrac{x}{y + 1} = \tfrac{1}{4}$

oder II. $4x - y = 1$.

Subtrahirt man (I.) von (II.), ſo bleibt

$x = 4$,

und mithin $y = 15$.

Der geſuchte Bruch iſt daher $\tfrac{4}{15}$.

26.

Der Zähler des geſuchten Bruches ſei $= x$ und der Nenner $= y$, ſo iſt

$$\frac{x-3}{y-3} = \frac{1}{4}$$

oder I. $4x - y = 9$.

Ferner iſt $\frac{x+5}{y+5} = \frac{1}{2}$

oder II. $2x - y = -5$.

Subtrahirt man (II.) von (I.) und beſtimmt y, ſo findet man

$$x = 7,$$

und demnach $y = 19$.

Der geſuchte Bruch iſt daher $\frac{7}{19}$.

27.

Das ausgeliehene Kapital von A ſei $= x$ und die dafür genommenen Procente $= y$, ſo iſt das von B ausgeliehene Kapital $= 12600 + x$ und die dafür genommenen Procente $y + 1$, und das Kapital von C $= 3000 + x$, die Procente aber $= y + 2$. Hiernach ſind die jährlichen Zinſen für A $= \frac{xy}{100}$, für B $= \frac{(12600 + x)\,(y + 1)}{100}$ und für C $= \frac{(3000 + x)\,(y + 2)}{100}$. Nach der Aufgabe erhält man nun folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{xy}{100} + 730 = \frac{(12600 + x)(y + 1)}{100},$$

$$\frac{xy}{100} + 380 = \frac{(3000 + x)(y + 2)}{100}$$

oder $\text{I. } 60400 = 12600y + x,$

$\text{II. } 32000 = 3000y + 2x.$

Subtrahirt man (II.) von (I.) und entwickelt y, ſo erhält man

$$\text{III. } y = \frac{28400 + x}{9600}.$$

Dieſen Werth von y in (I.) geſetzt, giebt endlich

$x = 10000$ Thlr.,

und ſubſtituirt man dieſen Werth in (III.), ſo findet man

$y = 4$ Procent ꝛc.

28.

Es ſei die Anzahl der Perſonen = x, dasjenige, was ein jeder verzehrte, = y Gr., und das, was die ganze Zeche betragen hat, = z; ſo haben die x Perſonen xy Gr. verzehrt. Es iſt daher

$xy = z$ oder $\text{I. } xy - z = 0.$

Wären 5 Perſonen mehr geweſen, und hätte jede 3 Gr. mehr verzehrt, ſo hätte die ganze Zeche $(x + 5)(y + 3)$ Gr. betragen. Es iſt alſo nach der Aufgabe

$(x + 5)(y + 3) = z + 157$ Gr.,

d. i. $xy + 3x + 5y + 15 = z + 157$

oder $\text{II. } xy + 3x + 5y - z = -15 + 157 = 142.$

Wären ferner 3 Perſonen weniger geweſen, und hätte jede 2 Gr. weniger verzehrt, ſo hätte die ganze Zeche $(x - 3)(y - 2)$ Gr. betragen. Folglich iſt, nach der Aufgabe,

$$(x - 3)(y - 2) = z - 82,$$

d. i. $xy - 2x - 3y + 6 = z - 82$

oder III. $xy - 2x - 3y - z = -6 - 82 = -88.$

Subtrahirt man (I.) von (II.), ſo bleibt

IV. $3x + 5y = 142.$

Subtrahirt man ferner (I.) von (III.), ſo bleibt

V. $2x + 3y = 88.$

Multiplicirt man endlich (IV.) mit 2, (V.) mit 3, und ſubtrahirt die letztere Gleichung von der erſteren, ſo bleibt

$y = 20$ Gr., was ein jeder verzehrte.

Dieſen Werth von y in (IV.) oder (V.) ſubſtituirt, giebt $x = 14$ Perſonen.

29. *)

Es ſei die Anzahl der Zeilen $= x$ und die der Buchſtaben in jeder Zeile $= y$, ſo iſt die Anzahl der Buchſtaben auf jeder Seite $= xy$. Nun iſt, nach der Anfgabe,

$$(x + 3)(y + 4) = xy + 224,$$

und $(x - 2)(y - 3) = xy - 145$

oder I. $3y + 4x = 212,$

II. $2y + 3x = 151.$

---

*) Die vorhergehende Aufgabe kann auch auf dieſelbe Art, wie folgende, ohne Einmiſchung einer dritten unbekannten Größe z gelöſt werden.

Aus (I.) ergiebt ſich

$$y = \frac{212 - 4x}{3}.$$

Dieſen Werth in (II.) geſetzt, giebt demnach

$$x = 29,$$

woraus man ferner erhält

$$y = 32.$$

30.

Die eine Zahl ſei x und die andere y, ſo iſt

$$(x + a)(y + b) = xy + c,$$
$$(x + a')(y + b') = xy + c'$$

oder $\text{I. } ay + bx = c - ab,$

$\text{II. } a'y + b'x = c' - a'b'.$

Aus (I.) erhält man

$$y = \frac{c - ab - bx}{a}.$$

Dieſen Werth in (II.) ſubſtituirt, giebt

$$x = \frac{ac' - a'c + aa'(b - b')}{ab' - a'b} \text{ ꝛc.}$$

31.

Der Scheffel Weizen koſte x Gr. und der Scheffel Roggen y Gr., ſo iſt

$$x : y = 4 : 3, \text{ alſo } 3x = 4y$$

oder $\text{I. } 3x - 4y = 0.$

Ferner koſtete vor einiger Zeit der Weizen x − 24 Gr. und der Roggen y − 21 Gr.; es iſt daher

$$x - 24 : y - 21 = 10 : 7$$

alſo $7x - 168 = 10y - 210$

oder II. $7x - 10y = -42$.

Multiplicirt man (I.) mit 7 und (II.) mit 3, zieht beide Gleichungen von einander ab, und beſtimmt y, ſo findet man

$y = 63$ Gr. $= 2$ Thlr. 15 Gr,

und hieraus $x = 84$ Gr. $= 3$ Thlr. 12 Gr.

32.

Anfänglich mögen im erſten Faſſe x Quart und im zweiten y Quart Wein enthalten geweſen ſein; ſo iſt, nachdem er aus dem erſten Faſſe in das zweite ſo viel gießt, als bereits darin iſt,

im erſten $x - y$ und im zweiten $2y$

enthalten. Gießt er nun aus dem zweiten in das erſte ſo viel, als nunmehr darin enthalten iſt,

ſo iſt im erſten $2(x - y)$,

und im zweiten $2y - (x - y) = 3y - x$

enthalten. Gießt er endlich wieder aus dem erſten in das zweite ſo viel, als bereits darin iſt, ſo iſt

im zweiten $2(3y - x)$,

und im erſten $2(x - y) - (3y - x) = 3x - 5y$.

Da nun zuletzt in beiden Fäſſern 16 Quart enthalten ſein ſollen, ſo iſt

I. $3x - 5y = 16$,

und II. $-2x + 6y = 16$.

Multiplicirt man (I.) mit 2 und (II.) mit 3, addirt beide Gleichungen und beſtimmt y, ſo findet man

$$y = 10$$ Quart im zweiten Faſſe,

und mithin $x = 22$ Quart im erſten Faſſe.

33.

Hier findet man die Gleichungen:

$$3x - 5y = a,$$

und $$-2x + 6y = a.$$

Verfährt man nun hier ebenſo, wie in der vorhergehenden Aufgabe, ſo erhält man

$$y = \frac{5a}{8},$$

und hieraus $$x = \frac{11a}{8}.$$

34.

Das Quart des beſſern Weines koſte x Gr. und das Quart des ſchlechtern y Gr. Vermiſcht er nun 3 Quart des beſſern mit 5 Quart des ſchlechtern Weines, ſo kann er dieſe 8 Quart das Quart zu $20\frac{1}{2}$ Gr. verkaufen. Es iſt daher

$$\text{I. } 3x + 5y = (3 + 5) \cdot 20\tfrac{1}{2} = 164.$$

Vermiſcht er aber $3\frac{3}{4}$ Quart des beſſern mit $7\frac{1}{2}$ Quart des ſchlechtern, ſo iſt

$$3\tfrac{3}{4}x + 7\tfrac{1}{2}y = (3\tfrac{3}{4} + 7\tfrac{1}{2})\ 20 = 225,$$

oder, wenn man die Brüche wegſchafft,

$$\text{II. } 15x + 30y = 900.$$

Multiplicirt man nun (I.) mit 5, ſubtrahirt dieſe Gleichung von (II.) und beſtimmt y, ſo findet man

$y = 16$ Gr. Preis eines Quarts vom ſchlechtern Weine,

und hieraus $x = 28$ Gr. Preis eines Quarts vom beſſern Weine.

35.

Hier ſind die beiden Gleichungen

$$\text{I. } ax + by = (a + b)\,c,$$

$$\text{II. } fx + gy = (f + g)\,h.$$

Multiplicirt man (I.) mit f und (II.) mit a, und zieht die letztere Gleichung von der erſtern ab, ſo iſt

$$(bf - ag)\,y = (a + b)\,cf - (f + g)\,ah,$$

$$\text{folgl } y = \frac{(a + b)\,cf - (f + g)\,ah}{bf - ag}.$$

Multiplicirt man ferner (I.) mit g und (II.) mit b, und zieht die letztere von der erſtern ab, ſo erhält man

$$x = \frac{(a + b)\,cg - (f + g)\,bh}{ag - bf}.$$

36.

Es mögen x Pfund Zinn und y Pfund Blei in der Miſchung geweſen ſein. Es iſt daher

$$\text{I. } x + y = 120 \text{ Pfund}.$$

Da nun ferner 37 Pfund Zinn im Waſſer 5 Pfund verlieren, ſo verlieren x Pfund Zinn im Waſſer $\frac{5x}{37}$ Pfund; 23 Pfund Blei verlieren im Waſſer 2 Pfund, folglich verlieren y Pfund im Waſſer $\frac{2y}{23}$ Pfund. Es verliert daher die Miſchung von x Pfund Zinn + y Pfund Blei im Waſſer $\frac{5x}{37}$ Pfund $+ \frac{2y}{23}$ Pfund. Nun verliert aber, nach der Aufgabe, die Miſchung im Waſſer 14 Pfund. Es iſt daher

$$\frac{5x}{37} + \frac{2y}{23} = 14$$

oder, wenn man die Brüche wegſchafft,

$$\text{II. } 115x + 74y = 11914.$$

Multiplicirt man nun (I.) mit 74, zieht dieſe Gleichung von (II.) ab und beſtimmt x, ſo erhält man

$$x = 74 \text{ Pfund Zinn.}$$

Subſtituirt man dieſen Werth von x in (I.) und beſtimmt y, ſo erhält man

$$y = 46 \text{ Pfund Blei.}$$

37.

Es mögen x Pfund Silber und y Pfund Kupfer in der Miſchung enthalten geweſen ſein. Es iſt daher

$$\text{I. } x + y = 148 \text{ Pfund.}$$

Da nun ferner 21 Pfund Silber im Waſſer 2 Pfund verlieren, ſo verlieren x Pfund Silber im Waſſer $\frac{2x}{21}$ Pfd.; 9 Pfd. Kupfer verlieren im Waſſer 1 Pfund, folgl. verlieren y Pfund im Waſſer $\frac{y}{9}$ Pfund. Es verliert alſo die Miſchung von x Pfund Silber $+$ y Pfund Kupfer im Waſſer $\frac{2x}{21}$ Pfd. $+ \frac{y}{9}$ Pfund. Nun verliert aber, nach der Aufgabe, die Miſchung im Waſſer $14\frac{2}{3}$ Pfund. Es iſt daher

$$\frac{2x}{21} + \frac{y}{9} = 14\tfrac{2}{3}$$

oder, wenn man die Brüche wegſchafft,

$$\text{II.}\quad 6x + 7y = 924.$$

Multiplicirt man (I.) mit 6 und zieht dieſe Gleichung von (II.) ab, ſo findet man

$$y = 36 \text{ Pfund Kupfer.}$$

Subſtituirt man dieſen Werth von y in (I.) und beſtimmt x, ſo findet man

$$x = 112 \text{ Pfund Silber.}$$

38.

Die Miſchung enthalte x Pfund von dem Metalle A und y Pfuud von dem Metalle B. Es iſt daher

$$\text{I.}\quad x + y = p.$$

Da nun ferner p Pfund von A im Waſſer b Pfund verlieren, ſo verlieren x Pfund $\frac{bx}{p}$ Pfund; p Pfund von B verlieren im Waſſer c Pfund, folglich verlieren y Pfund im Waſſer $\frac{cy}{p}$ Pfund. Es verliert alſo die Miſchung von x Pfund + y Pfund im Waſſer $\frac{bx}{p} + \frac{cy}{p}$. Nun verliert aber, nach der Aufgabe, dieſe Miſchung im Waſſer a Pfund. Es iſt daher

$$\frac{bx}{p} + \frac{cy}{p} = a$$

oder, wenn man die Brüche wegſchafft,

$$\text{II.}\quad bx + cy = ap.$$

Multiplicirt man (I.) mit b und zieht dieſe Gleichung von (II.) ab, ſo findet man

$$y = \frac{(a-b)\,p}{c-b}.$$

Multiplicirt man (I.) mit c und zieht ſie von (II.) ab, ſo erhält man

$$x = \frac{(a-c)\,p}{b-c} = \frac{(c-a)\,p}{c-b}.$$

39.

Die Miſchung enthalte x Pfund Gold und y Pfund Silber. Es iſt daher

$$\text{I.}\quad x + y = 20.$$

Da nun 19,64 Pfund Gold im Waſſer 1 Pfund verlieren, ſo verlieren x Pfund $\frac{x}{19,64}$ Pfd. Ferner verlieren 10,5 Pfd. Silber 1 Pfund, folglich verlieren y Pfund im Waſſer $\frac{y}{10,5}$ Pfund. Es verliert demnach die ganze Miſchung von x Pfund + y Pfund im Waſſer $\frac{x}{19,64} + \frac{y}{10,5}$ Pfd. Dieſe Miſchung verliert nun, nach der Aufgabe, $1\frac{1}{4}$ Pfund. Es iſt daher

$$\frac{x}{19,64} + \frac{y}{10,5} = \frac{5}{4}$$

$$\text{oder II.}\quad 10,5x + 19,64y = 257,775.$$

Multiplicirt man (I.) mit 10,5 und zieht dieſe Gleichung von (II.) ab, ſo erhält man

$$9,14y = 47,775$$

$$\text{und hieraus } y = 5,22\ldots \text{ rc.}$$

40.

Es werden x Pfund Blei und y Pfund Korkholz mit einander verbunden. Die Aufgabe verlangt nun, daß die Compoſition von Blei und Kork nicht allein ein beſtimmtes Gewicht, ſondern auch eine beſtimmte Größe habe. In Hinſicht des Gewichts hat man die Gleichung

$$\text{I.}\quad x + y = 80,$$

in Hinſicht der Größe aber urtheile man folgendergeſtalt. Ein Kubikfuß Waſſer wiege z. B. 1 Pfund, ſo wiegt 1 Kubikfuß Blei 11,324 Pfund. Man kann daher anſetzen:

$$11{,}324 \text{ Pfund} : 1 \text{ Kubf.} = x \text{ Pfund} : \frac{x}{11{,}324} \text{ Kubf.}$$

und auf gleiche Weiſe:

$$0{,}24 \text{ Pfund} : 1 \text{ Kubf.} = y \text{ Pfund} : \frac{y}{0{,}24} \text{ Kubf.}$$

Nun wiegt ferner 1 Kubf. von der Compoſition, die 80 Pfund wiegen ſoll, 0,45 Pfund, es iſt demnach auch

$$0{,}45 \text{ Pfund} : 1 \text{ Kubf.} = 80 \text{ Pfund} : \frac{80}{0{,}45} \text{ Kubf.}$$

Da nun der Körper von $\frac{80}{0{,}45}$ Kubf. entſtanden iſt, indem man $\frac{x}{11{,}324}$ Kubf. mit $\frac{y}{0{,}24}$ Kubf. verbunden hat, ſo erhält man die Gleichung

$$\text{II.}\quad \frac{x}{11{,}324} + \frac{y}{0{,}24} = \frac{80}{0{,}45}.$$

Aus den beiden Gleichungen (I. und II.) findet man nun leicht

$$x = 38{,}14\ldots \text{ und } y = 41{,}85\ldots$$

41.

Man verfährt hier ebenſo, wie bei der vorigen Aufgabe. Es iſt nämlich

$$p \text{ Pfund} : 1 \text{ Kubf.} = x \text{ Pfund} : \frac{x}{p} \text{ Kubf.}$$

Ferner p' Pfund : 1 Kubf. = y Pfund : $\frac{y}{p'}$ Kubf.

und p'' Pfund : 1 Kubf. = q Pfund : $\frac{q}{p''}$ Kubf.

Es iſt demnach

$$x + y = q,$$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{p'} = \frac{q}{p''}.$$

Aus dieſen beiden Gleichungen ergiebt ſich

$$x = \frac{pq\,(p' - p'')}{p''\,(p' - p)};\ y = \frac{p'q\,(p'' - p)}{p''\,(p' - p)}.$$

42.

Die Zahlen ſeien x und y, ſo iſt

$$x - y : x + y = 2 : 3,$$

ferner iſt $x + y : xy = 3 : 5.$

Man erhält daher durch die Zuſammenſetzung

$$x - y : xy = 2 : 5.$$

Hieraus ergiebt ſich

$$\text{I.}\quad 5x - 5y = 2xy.$$

Aus der Proportion

$$x + y : xy = 3 : 5$$

ergiebt ſich

$$\text{II.}\quad 5x + 5y = 3xy.$$

Subtrahirt man nun (I.) von (II.), ſo bleibt

$$10y = xy \text{ oder } x = 10.$$

Addirt man aber (I.) und (II.), ſo erhält man

$$10x = 5xy \text{ oder } y = 2.$$

43.

Die Zahlen ſeien x und y, ſo iſt

$$\text{I.} \quad x + y = m\,(x - y)$$

$$\text{und II.} \quad xy = n\,(x - y).$$

Aus (I.) folgt $x + y : x - y = m : 1$,

aus (II.) folgt $x - y : xy = 1 : n$.

Man erhält daher durch die Zuſammenſetzung

$$x + y : xy = m : n,$$

hieraus ergiebt ſich

$$\text{III.} \quad nx + ny = mxy.$$

Aus der Proportion

$$x - y : xy = 1 : n$$

ergiebt ſich

$$\text{IV.} \quad nx - ny = xy.$$

Subtrahirt man (IV.) von (III.), ſo iſt

$$2ny = (m - 1)\,xy \text{ oder } 2n = (m - 1)\,x,$$

$$\text{folgl. } x = \frac{2n}{m - 1}.$$

Addirt man (III.) und (IV.), ſo iſt

$$2nx = (m + 1)\,xy \text{ oder } 2n = (m + 1)\,y,$$

$$\text{folgl. } y = \frac{2n}{m + 1}.$$

44.

Die Zahlen ſeien x und y, ſo iſt

$$\text{I.}\quad x + y = 13$$

$$\text{und}\quad x^2 - y^2 = 39$$

$$\text{oder II.}\quad (x + y)(x - y) = 39.$$

Dividirt man (II.) durch (I.), ſo iſt

$$\text{III.}\quad x - y = 3.$$

Addirt man (III.) und (I.) und beſtimmt x, ſo erhält man

$$x = 8.$$

Subtrahirt man (III.) von (I.) und beſtimmt y, ſo erhält man

$$y = 5.$$

45.

Die Zahlen ſeien x und y, ſo iſt

$$\text{I.}\quad x + y = a$$

$$\text{und}\quad x^2 - y^2 = b,$$

$$\text{oder II.}\quad (x + y)(x - y) = b.$$

Dividirt man (II.) durch (I.), ſo iſt

$$\text{III.}\quad x - y = \frac{b}{a}.$$

Addirt man (III.) und (I.) und beſtimmt x, ſo erhält man

$$x = \frac{a^2 + b}{2a}.$$

Subtrahirt man (III.) von (I.) und beſtimmt y, ſo findet man

$$y = \frac{a^2 - b}{2a}.$$

46.

Die beiden Zahlen ſeien x und y, ſo iſt

$$\text{I.}\quad x + y = a$$

und $\frac{x}{y} = b$ oder II. $x = by$.

Subtrahirt man (II.) von (I.) und beſtimmt y, ſo findet man

$$y = \frac{a}{b + 1}.$$

Subſtituirt man dieſen Werth für y in (II.), ſo erhält man

$$x = \frac{ab}{b + 1}.$$

47.

Das Alter des Sohnes ſei = x, das Alter des Vaters = y, und das Alter des Großvaters = z, ſo iſt

$$\text{I.}\quad x + y = 56,$$
$$\text{II.}\quad y + z = 100,$$
$$\text{III.}\quad x + z = 80.$$

Addirt man dieſe Gleichungen, ſo erhält man

$$2\,(x + y + z) = 236$$

oder $x + y + z = 118$.

Zieht man von dieſer Gleichung der Reihe nach (II.), (III.) und (I.) ab, ſo erhält man

$x = 18$ Jahr, Alter des Sohnes,
$y = 38$ Jahr, Alter des Vaters,
$z = 62$ Jahr, Alter des Großvaters.

48.

Nennt man auch hier die Zahlen x, y und z, ſo iſt

$$\text{I. } x + y = a,$$

$$\text{II. } y + z = b,$$

$$\text{III. } x + z = c.$$

Addirt man dieſe drei Gleichungen, ſo erhält man

$$2(x + y + z) = a + b + c$$

$$\text{oder } x + y + z = \frac{a + b + c}{2}.$$

Zieht man von dieſer Gleichung der Reihe nach (I.), (II.) und (III.) ab, ſo erhält man

$$z = \frac{c + b - a}{2}; \; x = \frac{a - b + c}{2}; \; y = \frac{a + b - c}{2}.$$

49.

A beſitze x Thlr., B y Thlr. und C z Thlr., ſo iſt

$$\text{I. } x + \frac{3y}{7} = 2190,$$

$$\text{II. } y + \frac{5z}{9} = 2190,$$

$$\text{III. } z + \frac{2x}{3} = 2190.$$

Multiplicirt man (II.) mit $\frac{3}{7}$ und zieht dieſe Gleichung von (I.) ab, ſo bleibt

$$\text{IV. } x - \frac{5z}{21} = \frac{8760}{7}.$$

Multiplicirt man dieſe Gleichung mit $\frac{2}{3}$, ſubtrahirt ſie von (III.) und beſtimmt z, ſo findet man

$z = 1170$ Thlr. Vermögen des C,
und alſo $y = 1540$ Thlr. Vermögen des B,
und $x = 1530$ Thlr. Vermögen des A.

50.

A beſitze x Thlr., B y Thlr., und C z Thlr., ſo iſt

$$x + y = \frac{2z}{3} \quad \text{oder} \quad \text{I. } x + y - \frac{2z}{3} = 0,$$

$$y + z = 6x \quad \text{oder} \quad \text{II. } y + z - 6x = 0,$$

$$y + 680 = x + z \quad \text{oder} \quad \text{III. } x + z - y = 680.$$

Subtrahirt man (II.) von (I.) und beſtimmt x, ſo findet man

$$x = \frac{5z}{21}.$$

Ferner multiplicire man (I.) mit 6, addire (II.) dazu und beſtimme y, ſo findet man

$$y = \frac{3z}{7}.$$

Subſtituirt man nun die Werthe von x und y in (III.) und beſtimmt z, ſo findet man

$z = 840$ Thlr. Vermögen des C,
und alſo $y = 360$ Thlr. Vermögen des B,
und $x = 200$ Thlr. Vermögen des A.

51.

Im erſten Beutel ſeien x Thlr., im zweiten y Thlr. und im dritten z Thlr. befindlich, ſo iſt

$4(x-20) = y + 20$ oder I. $4x - y = 100$,

$\frac{7}{4}(y-60) = z + 60$ oder II. $\frac{7y}{4} - z = 165$,

$z - 40 = \frac{23}{8}(x + 40)$ oder III. $z - \frac{23x}{8} = 155$.

Addirt man (II.) und (III.), ſo iſt

$$\text{IV. } \frac{7y}{4} - \frac{23x}{8} = 320.$$

Multiplicirt man ferner (I.) mit $\frac{7}{4}$, addirt dieſe Gleichung zu (IV.) und beſtimmt x, ſo erhält man

$x = 120$ Thlr. im erſten Beutel,
und alſo $y = 380$ Thlr. im zweiten Beutel,
und $z = 500$ Thlr. im dritten Beutel.

52.

A habe x Thlr., B y Thlr. und C z Thlr., ſo iſt

$x + 700 = 2(y - 700)$ oder I. $x - 2y = -2100$,
$y + 1400 = 3(z - 1400)$ oder II. $y - 3z = -5600$,
$z + 420 = 5(x - 420)$ oder III. $z - 5x = -2520$.

Multiplicirt man (II.) mit 2 und addirt dieſe Gleichung zu (I.), ſo iſt

$$\text{IV. } x - 6z = -13300.$$

Multiplicirt man ferner (III.) mit 6, addirt dieſe Gleichung zu (IV.) und beſtimmt x, ſo findet man

$x = 980$ Thlr. Vermögen des A,
und alſo $y = 1540$ Thlr. Vermögen des B,
und $z = 2380$ Thlr. Vermögen des C.

53.

Die Zahlen ſeien x, y und z, ſo iſt

$$x - 4 : y + 4 = 1 : 2,$$
$$y - 10 : z + 10 = 3 : 10,$$
$$x - 5 : z + 5 = 3 : 11.$$

Hieraus ergiebt ſich

$2x - 8 = y + 4$ oder I. $2x - y = 12$,
$10y - 100 = 3z + 30$ oder II. $10y - 3z = 130$,
$11x - 55 = 3z + 15$ oder III. $11x - 3z = 70$.

Subtrahirt man (III.) von (II.), ſo bleibt

IV. $10y - 11x = 60$.

Multiplicirt man (I.) mit 10, addirt dieſe Gleichung zu (IV.) und beſtimmt x, ſo erhält man

$x = 20$,
und alſo $y = 28$,
und $z = 50$.

54.

A habe x Thlr., B y Thlr.,
ſo hat C 1820 Thlr. $- x - y$.
Nun iſt $x + 200 = y - 200 + 160$,
und $y + 70 = 1820 - x - y - 70$,
oder I. $x - y = -240$
II. $x + 2y = 1680$.

Subtrahirt man (I.) von (II.), ſo iſt

$3y = 1920$,
folgl. $y = 640$ Thlr. ꝛc.

55.

A beſitze x Thlr., B y Thlr. Da nun C, nach der Aufgabe, 4 Thlr. hat, ſo iſt

$$x + \frac{y}{4} = y + \tfrac{1}{2} \text{ oder } x - \frac{3y}{4} = \tfrac{1}{2},$$

$$\text{alſo I. } 4x - 3y = 2.$$

Ferner iſt $\frac{x}{2} + 4 = y + \tfrac{1}{2}$ oder $\frac{x}{2} - y = -3\tfrac{1}{2}$,

$$\text{alſo II. } x - 2y = -7.$$

Multiplicirt man (II.) mit 4, ſubtrahirt davon (I.) und beſtimmt y, ſo findet man

$y = 6$ Thlr., die Summe, welche A beſitzt,
und alſo $x = 5$ Thlr., die Summe, welche B beſitzt.

Folglich iſt die Summe, welche verzehrt worden,

$$= y + \tfrac{1}{2} = 6\tfrac{1}{2} \text{ Thlr.}$$

56.

Er habe x Mark 15löthiges, y Mark 10löthiges und z Mark 9löthiges Silber. Schmelzt er das 15- und 10löthige zuſammen, ſo iſt in der Maſſe $x + y$ $15x + 10y$ Loth Silber enthalten. Da nun, nach der Aufgabe, dieſes zuſammengeſchmolzene Silber $11\tfrac{2}{3}$löthig ſein ſoll, ſo enthalten $x + y$ Mark $(x + y)\, 11\tfrac{2}{3}$ Loth Silber. Es iſt demnach

$$15x + 10y = 11\tfrac{2}{3}\, x + 11\tfrac{2}{3}\, y,$$

$$\text{oder } 3\tfrac{1}{3}x - 1\tfrac{2}{3}y = 0.$$

Schafft man die Brüche weg, ſo iſt

$$10x - 5y = 0 \text{ oder I. } 2x - y = 0.$$

Schmelzt er das 10- und 9löthige zuſammen, ſo iſt in der Maſſe $y + z$ $10y + 9z$ Loth Silber enthalten. Nun ſoll, nach der Aufgabe, dieſes zuſammengeſchmolzene Silber 11$\frac{2}{3}$löthig ſein, folglich iſt

$$15x + 9z = 11\tfrac{2}{3}x + 11\tfrac{2}{3}z$$

oder $3\frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3}z = 0$.

Schafft man die Brüche weg, ſo iſt

$10x - 8z = 0$ oder II. $5x - 4z = 0$.

Nun iſt ferner

III. $x + y + z = 34$.

Addirt man hierzu (I.), ſo erhält man

$$3x + z = 34.$$

Multiplicirt man dieſe Gleichung mit 4, addirt (II.) hinzu und beſtimmt x, ſo findet man

$x = 8$ Mark 15löthiges Silber,
und alſo $y = 16$ Mark 10löthiges "
$z = 10$ Mark 9löthiges "

57.

Der Dukaten mag zu x Thlrn., der Friedrichsd'or zu y Thlrn. und der Carolin zu z Thlrn. gerechnet ſein, ſo iſt

I. $5x + 7y + 2z = 67\frac{1}{4}$,
II. $4x + 9y + 8z = 113\frac{7}{12}$,
III. $12x + 6y + 4z = 96$.

Multiplicirt man (I.) mit 2 und ſubtrahirt davon (III.), ſo bleibt

$$-2x + 8y = 38\tfrac{1}{2}$$

oder IV. $-x + 4y = 19\frac{1}{4}$.

Multiplicirt man ferner (III.) mit 2 und ſubtrahirt davon (II.), ſo bleibt

$$\text{V. } 20x + 3y = 78\tfrac{5}{12}.$$

Multiplicirt man endlich (IV.) mit 20, addirt dieſe Gleichung zu (V.) und beſtimmt y, ſo findet man

$y = 5\tfrac{7}{12}$ Thlr. Werth des Friedrichsd'or,
und alſo $x = 3\tfrac{1}{12}$ Thlr. Werth des Dukaten,
$z = 6\tfrac{3}{8}$ Thlr. Werth des Carolin.

58.

Der Wiſpel Weizen koſte x Thlr., der Wiſpel Roggen y Thlr., und der Wiſpel Gerſte z Thlr., ſo iſt

$$\text{I. } 8x + 3y + 5z = 734,$$
$$\text{II. } 3x + 10y + 7z = 812,$$
$$\text{III. } 6x + 9y + 13z = 1130.$$

Multiplicirt man (I.) mit 3 und zieht (III.) davon ab, ſo bleibt

$$18x + 2z = 1072$$
oder $\text{IV. } 9x + z = 536.$

Multiplicirt man ferner (I.) mit 10 und (II.) mit 3 und zieht letztere Gleichung von der erſtern ab, ſo bleibt

$$\text{V. } 71x + 29z = 4904.$$

Multiplicirt man endlich (IV.) mit 29, zieht (V.) davon ab und beſtimmt x, ſo findet man

$x = 56$ Thlr. Preis des Weizens,
und alſo $y = 42$ Thlr. Preis des Roggens,
$z = 32$ Thlr. Preis der Gerſte.

59.

Das Pfund Kaffee koſte x Thlr., das Pfund Zucker y Thlr. und das Pfund Thee z Thlr., ſo iſt

$$\text{I. } 7\tfrac{1}{2}x + 3y + 2\tfrac{1}{4}z = 11\tfrac{5}{8},$$
$$\text{II. } 9x + 7y + 3z = 16\tfrac{1}{4},$$
$$\text{III. } 2x + 5\tfrac{1}{2}y + 4z = 12\tfrac{1}{4}.$$

Man multiplicire (I.) mit 7 und (II.) mit 3, und ziehe die letztere Gleichung von der erſteren ab, ſo bleibt

$$25\tfrac{1}{2}x + 6\tfrac{3}{4}z = 32\tfrac{5}{8}$$

oder, indem man die Brüche wegſchafft und die ganze Gleichung durch 3 dividirt,

$$\text{IV. } 68x + 18z = 87.$$

Multiplicirt man ferner (I.) mit $5\frac{1}{2}$ und (III.) mit 3, und zieht die letztere Gleichung von der erſtern ab, ſo bleibt

$$35\tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{8}z = 27\tfrac{3}{16}$$

oder, indem man die Brüche wegſchafft und die ganze Gleichung durch 3 dividirt,

$$\text{V. } 188x + 2z = 145.$$

Multiplicirt man endlich (V.) mit 9, zieht von dieſer Gleichung (IV.) ab und beſtimmt x, ſo findet man

$x = \frac{3}{4}$ Thlr. = 18 Gr. Preis des Kaffees,
und alſo $y = \frac{1}{2}$ Thlr. = 12 Gr. Preis des Zuckers,
$z = 2$ Thlr. Preis des Thees.

60.

Man ſetze, A mache die ganze Arbeit in x Tagen, B in y Tagen und C in z Tagen fertig, ſo macht A in einem Tage $\frac{1}{x}$ der Arbeit, B in einem

Tage $\frac{1}{y}$ der Arbeit, und C in einem Tage $\frac{1}{z}$ der Arbeit. Es machen daher A und B zuſammen in einem Tage $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ der Arbeit fertig. Da nun A und B zuſammen die Arbeit in 12 Tagen vollenden, ſo machen ſie in einem Tage $\frac{1}{12}$ der Arbeit. Es iſt demnach

$$\text{I. } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}.$$

Auf eine ähnliche Art findet man

$$\text{II. } \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{20},$$

$$\text{und III. } \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{15}.$$

Subtrahirt man (II.) von (I.), ſo bleibt

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{1}{30}.$$

Addirt man hierzu (III.) und beſtimmt x, ſo findet man

$x = 20$ Tage, worin A die Arbeit vollendet,
und alſo $y = 30$ Tage für B,
$z = 60$ Tage für C.

Da nun ferner A, B und C zuſammen in einem Tage $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} = \frac{1}{10}$ der Arbeit fertig machen, ſo vollenden ſie zuſammen die ganze Arbeit in 10 Tagen.

61.

Hier habe x, y und z dieſelbe Bedeutung, wie in der vorigen Aufgabe. Da nun A und B zuſammen die Arbeit in a Tagen vollenden, ſo machen ſie in einem Tage $\frac{1}{a}$ der Arbeit. Es iſt demnach

$$\text{I.}\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a},$$

$$\text{und ebenſo II.}\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{b},$$

$$\text{III.}\quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{c}.$$

Subtrahirt man (III.) von (I.), ſo bleibt

$$\text{IV.}\quad \frac{1}{x}-\frac{1}{z}=\frac{1}{a}-\frac{1}{c}=\frac{c-a}{ac}.$$

Addirt man hierzu (II.) und beſtimmt x, ſo findet man

$$x=\frac{2abc}{bc+ac-ab}.$$

Subtrahirt man ferner (II.) von (I.), ſo bleibt

$$\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}.$$

Addirt man hierzu (III.) und beſtimmt y, ſo findet man

$$y=\frac{2abc}{bc+ab-ac}.$$

Subtrahirt man endlich (IV.) von (II.) und beſtimmt z, ſo findet man

$$z=\frac{2abc}{ab+ac-bc}\ \text{ꝛc.}$$

62.

Man findet den Werth von x, y und z in dieſer Aufgabe, welche als ein ſpecieller Fall der vorhergehenden anzuſehen iſt, wenn man in die allgemeinen Formeln, welche man in jener Aufgabe gefunden hat, ſtatt a, b, c die hier gegebenen Größen ſetzt. Nun iſt $a = 70$, $b = 84$, $c = 140$. Es iſt daher

$$x = \frac{2 \cdot 70 \cdot 84 \cdot 140}{84 \cdot 140 + 70 \cdot 140 - 70 \cdot 84} = \frac{1646400}{15680}$$
$$= 105 \text{ Minuten},$$

$$y = \frac{2 \cdot 70 \cdot 84 \cdot 140}{84 \cdot 140 + 70 \cdot 84 - 70 \cdot 140} = \frac{1646400}{7840}$$
$$= 210 \text{ Minuten},$$

$$z = \frac{2 \cdot 70 \cdot 84 \cdot 140}{70 \cdot 84 + 70 \cdot 140 - 84 \cdot 140} = \frac{1646400}{3920}$$
$$= 420 \text{ Minuten}.$$

63.

Von dem erſten Stück mag er x Loth, vom zweiten y Loth und vom dritten z Loth genommen haben. Da nun im erſten Stücke das Gold, das Silber und das Kupfer nach dem Verhältniß von 5 : 15 : 30 oder 1 : 3 : 6 enthalten iſt, ſo muß x in drei Theile, welche ſich wie 1 : 3 : 6 verhalten, zerfällt werden. Man dividire daher x durch $1 + 3 + 6 = 10$, und multiplicire dieſen Bruch der Reihe nach mit 1, 3 und 6, ſo erhält man für die drei Theile, woraus x zuſammengeſetzt iſt, $\frac{x}{10}$ Loth Gold, $\frac{3x}{10}$ Loth Silber, $\frac{3x}{5}$ Loth Kupfer. Im zweiten Stücke iſt das Verhältniß des Goldes, Silbers und Kupfers durch die Zahlen 20, 28, 48 oder 5, 7, 12 ausgedrückt. Man muß daher y nach dieſen Verhältniſſen theilen. Es iſt alſo y aus $\frac{5y}{24}$ Loth Gold, $\frac{7y}{24}$ Loth Silber und $\frac{y}{2}$ Loth Kupfer zuſammengeſetzt. Auf eine ähnliche Art findet man, daß in z $\frac{4z}{25}$ Loth Gold, $\frac{13z}{25}$ Loth Silber und $\frac{8z}{25}$ Loth Kupfer enthalten iſt. Es iſt demnach in den drei hinweggenommenen Stücken Metall

$$\frac{x}{10}+\frac{5y}{24}+\frac{4z}{25} \text{ Loth Gold,}$$

$$\frac{3x}{10}+\frac{7y}{24}+\frac{13z}{25} \text{ Loth Silber,}$$

$$\frac{3x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{8z}{25} \text{ Loth Kupfer}$$

enthalten. Da nun, nach der Aufgabe, in der Compoſition 10 Loth Gold enthalten ſein ſollen, ſo iſt

$$\frac{x}{10}+\frac{5y}{24}+\frac{4z}{25}=10$$

oder I. $60x+125y+96z=6000$.

Ferner ſollen in der Compoſition 23 Loth Silber enthalten ſein. Es iſt alſo

$$\frac{3x}{10}+\frac{7y}{24}+\frac{13z}{25}=23$$

oder II. $180x+175y+212z=13800$.

Endlich ſoll die Compoſition 26 Loth Kupfer enthalten. Es iſt alſo

$$\frac{3x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{8z}{25}=26$$

oder III. $30x + 25y + 16z = 1300.$

Multiplicirt man (III.) mit 2, und ſubtrahirt dieſe Gleichung von (I.), ſo bleibt

$$\text{IV. } 75y + 64z = 3400.$$

Multiplicirt man ferner (I.) mit 3 und ſubtrahirt davon (II.), ſo bleibt

$$\text{V. } 200y - 24z = 4200.$$

Multiplicirt man endlich (IV.) mit 3 und (V.) mit 8, addirt dieſe beiden Gleichungen zu einander, und beſtimmt y, ſo findet man

$y = 24$ Loth,

und alſo $x = 10$ Loth,

$z = 25$ Loth.

64.

1. Auflöſung.

A habe x Thlr., B y Thlr. und C z Thlr. erbeutet. Nun giebt A dem B und C ſo viel, wie jeder hat, es bleibt ihm alſo noch übrig $x - y - z$. Da ihm nun dieſer Reſt von B verdoppelt wird, und dieſer verdoppelte Reſt abermals von C verdoppelt wird, ſo iſt der ganze Reſt zuletzt $= 4\,(x - y - z)$. Nun ſoll, nach der Aufgabe, am Ende der ganzen Theilung ein jeder gleich viel von den erbeuteten 96 Thlrn. haben; es hat demnach ein jeder $\frac{96}{3} = 32$ Thlr. Hieraus folgt

$$4\,(x - y - z) = 32$$

oder $x - y - z = 8.$

Nach der erſten Theilung hat alſo A 8 Thlr., B 2y Thlr. und C 2z Thlr. Nun giebt B dem A 8 Thlr. und dem C 2z Thlr., er behält alſo 2y — 2z — 8 Thlr. übrig. Nachdem ihm dieſer Reſt von C verdoppelt worden, beſitzt er nach der Aufgabe ebenfalls 32 Thlr. Es iſt alſo

$$2\,(2y - 2z - 8) = 32$$

$$\text{oder } 2y - 2z - 8 = 16.$$

Nach der zweiten Theilung hat alſo A 16 Thlr., B 16 Thlr. und C 4z Thlr. Nun giebt endlich C dem A 16 Thlr. und dem B 16 Thlr., es bleiben ihm alſo noch 4z — 16 — 16 oder 4z — 32, und dieſer Reſt beträgt nach der Aufgabe wiederum 32 Thlr. Es iſt daher

$$4z - 32 = 32,$$

folgl. $z = 16$ Thlr. die Beute des C,

und alſo $y = 28$ Thlr. die Beute des B,

$x = 52$ Thlr. die Beute des A.

2. Auflöſung

Da A x Thlr. erbeutet hat, ſo beträgt die Beute des B und C 96 — x. Nun giebt A dem B und C ſo viel, wie ſie beſitzen, nämlich 96 — x; er behält demnach $x - (96 - x) = 2x - 96$ übrig. Dieſer Reſt wird ihm durch B und C vervierfacht, er hat alſo am Ende der ganzen Theilung $8x - 384$; und dieſes iſt, nach der Aufgabe, $= \frac{96}{3} = 32$. Es iſt alſo

$$8x - 384 = 32,$$

folgl. $x = 52$ Thlr. Beute des A.

Nun beſitzt B nach der erſten Theilung $2y$, folglich beſitzen A und C zuſammen $96 - 2y$. Es bleibt alſo dem B nach der Theilung an A und C $2y - (96 - 2y) = 4y - 96$ übrig. Dieſer Reſt wird ihm durch C verdoppelt; er hat alſo am Ende der Theilung $8y - 192$, und dieſes iſt $= 32$. Es iſt demnach

$$8y - 192 = 32,$$

folgl. $y = 28$ Thlr. Beute des B.

Hieraus ergiebt ſich alſo

$$z = 96 - (52 + 28) = 16 \text{ Thlr. Beute des C.}$$

Algebraiſche Auflöſung.

Nachdem C dem A und B ſo viel gegeben hat, als jeder beſitzt, hat jeder 32 Thlr., mithin muß A ſowohl, als B vor dieſer Theilung 16 Thlr. gehabt haben; und da C jedem 16 Thlr., alſo zuſammen 32 Thlr. giebt und noch 32 Thlr. übrig behält, ſo muß C 64 Thlr. gehabt haben. Dieſes war die Baarſchaft eines jeden, bevor C oder nachdem B getheilt hatte.

Bevor alſo B getheilt hatte, mußte A 8 Thlr., C 32 Thlr. gehabt haben; und da B $32 + 8 = 40$ Thlr. weggiebt und noch 16 Thlr. übrig behält, ſo muß B 56 Thlr. gehabt haben. Dieſes war diejenige Summe, welche ein jeder hatte, bevor B oder nachdem A getheilt hatte.

Bevor alſo A dem B und C jedem ſo viel gab, als er bereits hatte, mußte B 28 Thlr., C 16 Thlr. gehabt haben; und da A $28 + 16 = 44$ Thlr. weggiebt und noch 8 Thlr. übrig behält, ſo muß A 52 Thlr. gehabt haben.

65.

Die drei Fächer mögen A, B, C heißen, und in A ſeien x Thlr. enthalten, ſo iſt die Summe, welche ſich in B und C zuſammen befindet, $= 162 - x$. Nun wird in B und C ſo viel hineingelegt, als die Hälfte des bereits darin befindlichen Geldes beträgt, d. i. $\frac{162-x}{2}$; es bleibt daher in A $x - \frac{162-x}{2} = \frac{3x-162}{2}$ übrig. Nun wird zuvörderſt aus B die Hälfte dieſes Reſtes $= \frac{3x-162}{4}$ zugelegt, wodurch ſich alſo in A $\frac{3x-162}{2} + \frac{3x-162}{4} = \frac{9x-486}{4}$ befinden. Alsdann wird abermals aus C die Hälfte dieſer Summe $= \frac{9x-486}{8}$ zugelegt; es befindet ſich alſo in A $\frac{9x-486}{4} + \frac{9x-486}{8} = \frac{27x-1458}{8}$. Nach dieſer Vertheilung befindet ſich, der Aufgabe gemäß, in A $\frac{162}{3} = 54$ Thlr. Es iſt demnach

$$\frac{27x-1458}{8} = 54,$$

folgl. $x = 70$ Thlr. im Fache A.

Nun ſeien ferner in B anfänglich y Thlr. enthalten, ſo iſt in dieſem Fache, nachdem aus A $\frac{1}{2}$y zugelegt worden, $\frac{3y}{2}$ befindlich, mithin iſt in A und C zuſammen $162 - \frac{3y}{2} = \frac{324 - 3y}{2}$ enthalten. Es bleibt alſo, nachdem man aus B in A und C die Hälfte von dem, was ſchon darin iſt, nämlich $\frac{324-3y}{4}$ zugelegt, in B $\frac{3y}{2} - \frac{324 - 3y}{4} = \frac{9y - 324}{4}$ zurück. Dieſer Reſt wird aus C um die Hälfte $= \frac{9y - 324}{8}$ vermehrt. Es iſt daher am Ende der Vertheilung in B $\frac{9y - 324}{4} + \frac{9y - 324}{8} = \frac{27y - 972}{8}$ enthalten. Dieſes giebt alſo

$$\frac{27y - 972}{8} = 54,$$

folgl. y = 52 Thlr. im Fache B.

Es ſind demnach im dritten Fache C anfänglich

$$162 - (70 + 52) = 40 \text{ Thlr.}$$

enthalten geweſen.

Dieſe Aufgabe läßt ſich ebenfalls algebraiſch auflöſen.

66.

Vor dem Spiele habe A x Dukaten, B y Dukaten und C z Dukaten gehabt. Ferner ſetze man die Summe, welche A, B und C vor dem Spiele hatten,

$= s$, oder $x + y + z = s$. Da nun A x Thlr. hat, ſo haben die beiden andern zuſammen $s - x$, und folglich verliert A an B und C $\frac{s-x}{3}$; es bleibt ihm daher $x - \frac{s-x}{3} = \frac{4x-s}{3}$ übrig. Es hat demnach am Ende des erſten Spiels

$$A\ \frac{4x-s}{3},\ B\ \frac{4y}{3},\ C\ \frac{4z}{3}.$$

Da nun B $\frac{4y}{3}$ hat, ſo haben A und C zuſammen $s - \frac{4y}{3} = \frac{3s-4y}{3}$, und folglich verliert B an A und C $\frac{3s-4y}{9}$; es bleibt ihm daher $\frac{4y}{3} - \frac{3s-4y}{9} = \frac{16y-3s}{9}$ übrig. A aber hat zu ſeinen $\frac{4x-s}{3}$ noch ein Drittel, nämlich $\frac{4x-s}{9}$ hinzubekommen, und hat daher $\frac{4x-s}{3} + \frac{4x-s}{9} = \frac{16x-4s}{9}$, und C hat $\frac{4z}{3} + \frac{4z}{9} = \frac{16z}{9}$. Es hat demnach am Ende des zweiten Spiels

$$A\ \frac{16x-4s}{9},\ B\ \frac{16y-3s}{9},\ C\ \frac{16z}{9}.$$

Da nun endlich C $\frac{16z}{9}$ hat, ſo haben A und B zuſammen $s - \frac{16z}{9} = \frac{9s-16z}{9}$, und folglich verliert C an A und B $\frac{9s-16z}{27}$; es bleibt ihm daher

$\frac{16z}{9} - \frac{9s - 16z}{27} = \frac{64z - 9s}{27}$ übrig. A aber hat zu der Summe $\frac{16x-4s}{9}$ noch ein Drittel hinzu bekommen, er hat daher $\frac{16x - 4s}{9} + \frac{16x - 4s}{27} = \frac{64x - 16s}{27}$, und B hat $\frac{16y - 3s}{5} + \frac{16y - 3s}{27} = \frac{64y - 12s}{27}$. Es hat demnach am Ende des dritten Spiels

$$A\ \frac{64x - 16s}{27},\quad B\ \frac{64y - 12s}{27},\quad C\ \frac{64z - 9s}{27}.$$

Nun hat, nach der Aufgabe, am Ende des Spiels ein jeder 64 Dukaten, und während des Spiels iſt anderes Geld weder hinzugekommen, noch hinweggenommen worden; ſie haben alſo zuſammen anfänglich $3 \cdot 64 = 192$ Dukaten $= s$ gehabt. Es iſt daher

$$\frac{64x - 16 \cdot 192}{27} = 64,$$

folgl. $x = 75$ Dukaten für A,

ferner $\frac{64y - 12 \cdot 192}{27} = 64,$

folgl. $y = 63$ Dukaten für B,

und endlich $\frac{64z - 9 \cdot 192}{27} = 64,$

folgl. $z = 54$ Dukaten für C.

67.

Vor dem Spiele habe A x Thlr., B y Thlr., C z Thlr., D u Thlr., E v Thlr. gehabt. Ferner ſei $x + y + z + u + v = s$. Da nun A x Thlr. hat, ſo haben B, C, D, E zuſammen $s - x$ Thlr., und folglich verliert A $s - x$; es bleibt ihm daher noch $x - (s - x) = 2x - s$ übrig. Es hat demnach am Ende des erſten Spiels

A $2x - s$, B $2y$, C $2z$, D $2u$, E $2v$.

Da nun B $2y$ hat, ſo haben die übrigen vier Spieler $s - 2y$, und folglich verliert B $s - 2y$; er behält alſo $2y - (s - 2y) = 4y - s$ übrig. Es hat demnach am Ende des zweiten Spiels

A $4x - 2s$, B $4y - s$, C $4z$, D $4u$, E $4v$.

Nun hat ferner C $4z$; mithin haben die übrigen $s - 4z$, und folglich verliert C $s - 4z$, und behält demnach $4z - (s - 4z) = 8z - s$. Es hat alſo am Ende des dritten Spiels

A $8x - 4s$, B $8y - 2s$, C $8z - s$, D $8u$, E $8v$.

Nunmehr hat D $8u$, folglich haben die übrigen $s - 8u$, und ſo viel verliert D; es bleibt ihm alſo noch $8u - (s - 8u) = 16u - s$ übrig. Es hat demnach am Ende des vierten Spiels

A $16x - 8s$, B $16y - 4s$, C $16z - 2s$,
D $16u - s$, E $16v$.

E hat $16v$, folglich haben die übrigen $s - 16v$, und ſo viel verliert E; es bleibt ihm alſo noch $16v - (s - 16v) = 32v - s$. Es hat demnach am Ende des fünften Spiels

A $32x - 16s$, B $32y - 8s$, C $32z - 4s$,
D $32u - 2s$, E $32v - s$.

Nun hat, nach der Aufgabe, am Ende des Spiels ein jeder 32 Thlr., und während des Spiels iſt anderes Geld weder hinzugekommen, noch hinweggenommen worden; ſie haben alſo zuſammen anfänglich $5 \cdot 32 =$ 160 Thlr. $= s$ gehabt. Es iſt daher

$32x - 16 \cdot 160 = 32$ oder $x = 81$ Thlr. für A,
ferner $32y - 8 \cdot 160 = 32$ oder $y = 41$ Thlr. für B,
und $32z - 4 \cdot 160 = 32$ oder $z = 21$ Thlr. für C,
und $32u - 2 \cdot 160 = 32$ oder $u = 11$ Thlr. für D,
und $32v - 1 \cdot 160 = 32$ oder $v = 6$ Thlr. für E.

Algebraiſche Auflöſung.

Die ganze Summe, welche unter den Spielenden cirkulirt, iſt $= 5 \cdot 32 = 160$. Nun verliert A ſo viel, wie die übrigen vier zuſammen beſitzen, und behält noch einen Reſt übrig. Die 160 Thlr. zerfallen alſo in zwei gleiche Theile und dieſen Reſt, wovon A einen ſolchen Theil nebſt dem Reſte vor dem Spiele beſitzt. Man erhält daher das Geld von A, ſobald man dieſen Reſt kennt.

Man ſchließe alſo: Nachdem A geſpielt und verloren hat, wird ihm der Reſt von B verdoppelt, und dieſe Summe abermals von C, und ſo immer der Reihe nach von D und E verdoppelt, d. h. der Reſt wird mit $2^4 = 16$ multiplicirt. Da er nun am Ende des Spiels 32 Thlr. hat, ſo kann der erwähnte Reſt keine andere Zahl als 2 ſein, weil nämlich $2 \cdot 16 = 32$ iſt.

Es hat demnach A $\frac{160-2}{2}+2=81$ Thlr. vor dem Spiele gehabt.

Nachdem ferner B verloren und einen Reſt übrig behalten hat, iſt ihm dieſer Reſt von C, D und E, auf dieſelbe Art, wie bei A, der Reihe nach verdoppelt, d. h. dieſer Reſt iſt mit $2^3 = 8$ multiplicirt worden. Da er nun am Ende des Spiels 32 Thlr. hat, ſo muß der Reſt = 4 ſein, weil nämlich $4 \cdot 8 = 32$ iſt. Es beſitzt alſo B, bevor er verliert, und nachdem ihm ſein Geld von A verdoppelt worden, $\frac{160-4}{2}+4=82$, und folglich zu Anfange des Spiels $\frac{82}{2}=41$ Thlr.

Nun ſpielt C, verliert und behält einen Reſt übrig. Dieſer Reſt giebt mit $2^2 = 4$ multiplicirt 32, er muß alſo = 8 ſein. Es beſitzt daher C, bevor er verliert, und nachdem ihm ſein Geld von A und B um das Vierfache vermehrt worden iſt, $\frac{160-8}{2}+8=84$ Thlr., und folglich zu Anfange des Spiels $\frac{84}{4}=21$ Thlr.

Auf eine ähnliche Art findet man, daß der Reſt von D = 16 iſt, und daß dasjenige, was er beſitzt, bevor er verliert, und nachdem ihm ſein Geld von A, B und C um das Achtfache vermehrt worden iſt, $\frac{160-16}{2}+16=88$ beträgt, und daß alſo ſein anfängliches Geld $\frac{88}{8}=11$ Thlr. iſt.

Was endlich E betrifft, ſo findet man ſein anfängliches Geld $= 160 - (81 + 41 + 21 + 11)$ $= 6$ Thlr.

68.

Das erſte Regiment ſei x Mann, das zweite y Mann, das dritte z Mann ſtark. Erhält nun das erſte Regiment auf einen Mann einen Thaler, ſo beträgt dieſes x Thlr., auf das zweite $\frac{y}{2}$ Thlr. und auf das dritte $\frac{z}{2}$ Thlr. Es iſt daher

$$x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 2652,$$

$$\text{oder I. } 2x + y + z = 5304.$$

Wird dieſer Thaler dem zweiten Regiment zuerkannt, ſo iſt

$$\frac{x}{3} + y + \frac{z}{3} = 2652,$$

$$\text{oder II. } x + 3y + z = 7956.$$

Wird er endlich dem dritten zuerkannt, ſo iſt

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + z = 2652,$$

$$\text{oder III. } x + y + 4z = 10608.$$

Subtrahirt man (I.) von (II.), ſo bleibt

$$\text{IV. } 2y - z = 2652.$$

Multiplicirt man (I.) mit 4, und ſubtrahirt davon (III.), ſo bleibt

$$\text{V. } 7x + 3y = 10608.$$

Multiplicirt man ferner (IV.) mit 7, addirt dieſe Gleichung zu (V.) und beſtimmt y, ſo findet man

$y = 1716$ Mann, Stärke des zweiten Regim.,
und alſo $x = 780$ Mann, Stärke des erſten Regim.,
und $z = 2028$ Mann, Stärke des dritten Regim.

69.

Die drei geſuchten Zahlen ſeien x, y, z.

Man ſetze $x + y + z = S$, ſo iſt, nach der Aufgabe,

$$x + m(S - x) = a, \text{ folgl. I. } x = \frac{a - mS}{1 - m},$$

$$y + m'(S - y) = a', \text{ folgl. II. } y = \frac{a' - m'S}{1 - m'},$$

$$z + m''(S - z) = a'', \text{ folgl. III. } z = \frac{a'' - m''S}{1 - m''}.$$

Es iſt demnach

$$S = \frac{a - mS}{1 - m} + \frac{a' - m'S}{1 - m'} + \frac{a'' - m''S}{1 - m''}$$

$$= \frac{a}{1-m} - \frac{mS}{1-m} + \frac{a'}{1-m'} - \frac{m'S}{1-m'} + \frac{a''}{1-m''} - \frac{m''S}{1-m''}$$

$$= \frac{a}{1-m} + \frac{a'}{1-m'} + \frac{a''}{1-m''} - S\left(\frac{m}{1-m} + \frac{m'}{1-m'} + \frac{m''}{1-m''}\right)$$

oder $\left(1 + \frac{m}{1 - m} + \frac{m'}{1 - m'} + \frac{m''}{1 - m''}\right)S$

$$= \frac{a}{1 - m} + \frac{a'}{1 - m'} + \frac{a''}{1 - m''},$$

$$\text{folgl. } S = \frac{\frac{a}{1 - m} + \frac{a'}{1 - m'} + \frac{a''}{1 - m''}}{1 + \frac{m}{1 - m} + \frac{m'}{1 - m'} + \frac{m''}{1 - m''}}.$$

Setzt man nun $\frac{m}{1-m}+\frac{m'}{1-m'}+\frac{m''}{1-m''}=A$,

und $\frac{a}{1-m}+\frac{a'}{1-m'}+\frac{a''}{1-m''}=B$,

ſo iſt $S=\frac{B}{1+A}$.

Dieſen gefundenen Werth von S ſubſtituire man in (I.) (II.) (III.), ſo iſt

$$x=\frac{a-m\frac{B}{1+A}}{1-m}=\frac{1}{1-m}\left(a-\frac{mA}{1+A}\right),$$

$$y=\frac{a'-m'\frac{B}{1+A}}{1-m'}=\frac{1}{1-m'}\left(a'-\frac{m'B}{1+B}\right),$$

$$z=\frac{a''-m''\frac{B}{1+A}}{1-m''}=\frac{1}{1-m''}\left(a''-\frac{m''B}{1+A}\right).\ ^{*)}$$

70.

Man löſe die Aufgabe genau ſo, wie die vorhergehende, ſo wird man ohne Schwierigkeit das verlangte Reſultat finden.

---

*) Die hier gefundenen Ausdrücke für S, x, y und z haben zwar die entgegengeſetzten Vorzeichen von denen, die der Herr Verfaſſer der Beiſpielſammlung angegeben hat, beide Auflöſungen liefern jedoch ein ganz gleiches Reſultat, da bekanntlich der Zähler und Nenner eines Bruches jedesmal mit — 1 multiplicirt werden kann, wodurch zwar die Vorzeichen verändert werden, der Werth des Bruches aber derſelbe bleibt. Die hier angeſetzten Zeichen fließen unmittelbar aus der Aufgabe, weshalb ſie auch den Vorzug vor den entgegengeſetzten Vorzeichen verdienen.

71.

Die drei Zahlen ſeien x, y und z, ſo iſt

$$\text{I.}\quad x + y + z = 83.$$

Ferner iſt $x - 7 : y - 7 = 5 : 3$,

alſo $3x - 21 = 5y - 35$, oder $\text{II.}\ 5y - 3x = 14$,

desgleichen iſt $y - 3 : z - 3 = 11 : 9$,

alſo $9y - 27 = 11z - 33$, oder $\text{III.}\ 11z - 9y = 6$.

Multiplicirt man nun (I.) mit 3 und addirt zu dieſer Gleichung (II.), ſo iſt

$$\text{IV.}\quad 8y + 3z = 263.$$

Multiplicirt man ferner (III.) mit 8, (IV.) mit 9, addirt beide Gleichungen und beſtimmt z, ſo findet man

$$z = 21,$$

und alſo $x = 37$,

und $y = 25$.

72.

Die drei Zahlen ſeien x, y und z, ſo iſt

$$x + 6 : y + 6 = 2 : 3,$$

alſo $3x + 18 = 2y + 12$, oder $\text{I.}\ 2y - 3x = 6$.

Ferner iſt $x + 5 : z + 5 = 7 : 11$,

alſo $11x + 55 = 7z + 35$, oder $\text{II.}\ 7z - 11x = 20$.

Ebenſo iſt $y - 36 : z - 36 = 6 : 7$,

alſo $7y - 252 = 6z - 216$,

oder $\text{III.}\ 6z - 7y = -36$.

Multiplicirt man (I.) mit 11 und (II.) mit 3 und zieht letztere Gleichung von der erſtern ab, ſo bleibt

$$\text{IV.}\quad 22y - 21z = 6.$$

Multiplicirt man ferner (III.) mit 7 und (IV.) mit 2, addirt beide Gleichungen und beſtimmt y, ſo findet man

$$y = 48,$$
$$\text{und alſo } x = 30$$
$$\text{und } z = 50.$$

73.

Die Ziffer in der Stelle der Einer ſei x, die in der Stelle der Zehner y, die in der Stelle der Hunderter z. Da nun dieſe drei Ziffern eine arithmetiſche Proportion bilden ſollen, ſo iſt

$$x - y = y - z,$$

alſo $x + z = 2y$, oder I. $x + z - 2y = 0$.

Ferner hat die geſuchte Zahl die Form

$$x + 10y + 100z.$$

Da nun die Zahl, durch die Summe der Ziffern dividirt, zum Quotienten 48 geben ſoll, ſo iſt

$$\frac{x + 10y + 100z}{x + y + z} = 48,$$

oder II. $47x + 38y - 52z = 0$.

Zieht man endlich von der geſuchten Zahl 198 ab, ſo ſoll man eine Zahl erhalten, welche die nämlichen Ziffern, wie die geſuchten, in umgekehrter Ordnung enthält. Es iſt demnach

$$x + 10y + 100z - 198 = z + 10y + 100x,$$

alſo $99x - 99z = -198$, oder III. $x - z = -2$.

Multiplicirt man (I.) mit 19 und addirt die Gleichung zu (II.), ſo iſt, wenn durch 33 dividirt wird,

$$2x - z = 0.$$

Subtrahirt man hiervon die Gleichung (III.), ſo findet man unmittelbar

$x = 2$ in der Stelle der Einer,

und alſo $z = 4$ in der Stelle der Hunderter

und $y = 3$ in der Stelle der Zehner.

Die geſuchte Zahl iſt alſo $= 432$.

VIII.

Auflöſungen der Aufgaben für die Gleichungen des zweiten Grades mit einer und mit mehreren unbekannten Größen.

(Zu M. Hirſch, Sammlung von Beiſpielen ꝛc. XVII. Kapitel, von S. 224 bis S. 244.)

1.

Die Zahl ſei = x, ſo iſt

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 864,$$

$$\text{alſo } x^2 = 5184,$$

$$\text{folgl. } x = 72.$$

2.

Die Zahl ſei = x, ſo iſt

$$\frac{\frac{x}{7} \cdot \frac{x}{8}}{3} = 298\tfrac{2}{3},$$

$$\text{alſo } x^2 = 50176,$$

$$\text{folgl. } x = 224.$$

3.

Die Zahl ſei x, ſo iſt

$$(94 + x) \cdot (94 - x) = 8512$$

$$\text{oder } 8836 - x^2 = 8512,$$

$$\text{folgl. } x = 18.$$

4.

Die Zahlen ſeien x und y, ſo iſt

$$\text{I. } xy = 750,$$

$$\text{II. } \frac{x}{y} = 3\tfrac{1}{3}.$$

Aus (II.) ergiebt ſich $x = 3\tfrac{1}{3}y$.

Subſtituirt man dieſen Werth für x in (I.), ſo erhält man

$$3\tfrac{1}{3}y^2 = 750,$$

$$\text{folgl. } y = 15,$$

$$\text{und alſo } x = 50.$$

5.

Die beiden Zahlen ſeien x und y, ſo iſt

$$\text{I. } xy = a,$$

$$\text{II. } \frac{x}{y} = b.$$

Entwickelt man x aus (II.) und ſubſtituirt den gefundenen Werth in (I.), ſo erhält man

$$by^2 = a,$$

$$\text{folgl. } y = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Den Werth für y in (II.) geſetzt und entwickelt, giebt

$$x = b\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab^2}{b}} = \sqrt{ab}.$$

6.

Die beiden Zahlen ſeien x und y, ſo iſt

$$\text{I. } x^2 + y^2 = 13001,$$
$$\text{II. } x^2 - y^2 = 1449.$$

Addirt man beide Gleichungen, ſo iſt

$$2x^2 = 14450,$$
$$\text{folgl. } x = 85.$$

Subtrahirt man (II.) von (I.), ſo iſt

$$2y^2 = 11552,$$
$$\text{folgl. } y = 76.$$

7.

Die Zahlen ſeien x und y, ſo iſt

$$\text{I. } x^2 + y^2 = a,$$
$$\text{II. } x^2 - y^2 = b.$$

Subtrahirt man (II.) von (I.) und beſtimmt y, ſo findet man

$$y = \sqrt{\frac{a-b}{2}}.$$

Addirt man (II.) und (I.) und beſtimmt x, ſo findet man

$$x = \sqrt{\frac{a+b}{2}}.$$

8.

Die geſuchten Zahlen ſeien x und y, ſo iſt

$$x : y = 3 : 4, \text{ alſo I. } 4x = 3y,$$
$$\text{ferner iſt II. } x^2 + y^2 = 324900.$$

Entwickelt man x aus (I.) und ſubſtituirt den dafür gefundenen Werth in (II.), ſo erhält man

$$\frac{25y^2}{16} = 324900,$$

folgl. $y = 456$ ꝛc.

9.

Wenn x und y die geſuchten Zahlen ſind, ſo iſt

$$x : y = m : n, \text{ alſo I. } nx = my,$$

ferner iſt $\text{II. } x^2 + y^2 = b.$

Entwickelt man x aus (I.) und ſubſtituirt den Werth in (II.), ſo ergiebt ſich $(m^2 + n^2)\, y^2 = bn^2$,

folgl. $y^2 = \frac{bn^2}{m^2 + n^2}$, und alſo $y = \frac{n\sqrt{b}}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$ ꝛc.

10.

Verfährt man hier ebenſo, wie bei der vorigen Aufgabe, ſo erhält man

$$(m^2 - n^2)\, y^2 = bn^2,$$

folgl. $y = \frac{n\sqrt{b}}{\sqrt{(m^2 - n^2)}}$.

11.

Das Kapital ſei = x Thlr. Nun tragen x Thlr. in einem Jahre zu 4 Procent $\frac{x}{25}$ Thlr. Intereſſen, folglich in einem Monat $\frac{1}{12} \cdot \frac{x}{25}$ und in 5 Monaten $\frac{5}{12} \cdot \frac{x}{25} = \frac{x}{60}$ Thlr. Multiplicirt man dieſe Intereſſen mit dem Kapitale, ſo erhält man $\frac{x^2}{60}$. Es iſt demnach

$$\frac{x^2}{60} = 117041\tfrac{2}{3},$$

folgl. $x = 2650$ Thlr. Kapital.

12.

Er habe von der erſten Sorte x Pfund, ſo hat er von der zweiten $\frac{4x}{3}$ Pfund und von der dritten $\frac{7}{2} \cdot \frac{4x}{3} = \frac{14x}{3}$ Pfund. Da nun das Pfund von der erſten Sorte x Gr. koſtet, ſo koſten x Pfund x^2 Gr.; eben ſo koſtet das Pfund von der zweiten Sorte $\frac{4x}{3}$ Gr., folglich koſten $\frac{4x}{3}$ Pfund $\frac{16x^2}{9}$ Gr. Auf eine ähnliche Art findet man, daß die $\frac{14x}{3}$ Pfund von der dritten Sorte $\frac{196x^2}{9}$ Gr. koſten. Es iſt demnach

$$x^2 + \frac{16x^2}{9} + \frac{196x^2}{9} = 5525,$$

folgl. $x = 15$ Pfund von der erſten Sorte
hieraus folgt 20 Pfund von der zweiten Sorte,
und 70 Pfund von der dritten Sorte.

13.

Er habe x Pfund vorräthig. Verkauft er das Pfund zu $2\tfrac{3}{5}x$ Gr. $= \frac{13x}{5}$, ſo erhält er für x Pfund $x \cdot \frac{13x}{5}$ Gr. $= \frac{13x^2}{5}$ Gr. Verkauft er aber das Pfund für $\frac{x}{2}$ Gr., ſo erhält er für x Pfund $\frac{x^2}{2}$ Gr. Nun beträgt, nach der

Aufgabe, $\frac{13x^2}{5}$ eben ſo viel über 155 Gr., als $\frac{x^2}{2}$ weniger, als 155 Gr. beträgt. Es iſt demnach

$$\frac{13x^2}{5} - 155 = 155 - \frac{x^2}{2},$$

folgl. $x = 10$ Pfund.

14.

Die Zahl ſei x, ſo iſt

$$\frac{\left(\frac{7x}{3} + 7\right)8x}{14} - 4x = 2352,$$

oder $$\frac{\frac{56x^2}{3} + 56x - 56x}{14} = \frac{4x^2}{3} = 2352,$$

folgl. $x = 42$.

15.

Die geſuchten Zahlen ſeien x, y, z, ſo iſt

I. $xy = a$ II. $xz = b$ III. $y^2 + z^2 = c$.

Man entwickele y aus (I.) und z aus (II.) und ſetze das Quadrat der beiden Werthe in (III.), ſo erhält man

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{x^2} = \frac{a^2 + b^2}{x^2} = c,$$

folgl. $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c}}$.

Subſtituirt man dieſen Werth in (I.), ſo iſt

$$y\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c}} = a,$$

folglich $y = \frac{a}{\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c}}} = \frac{a}{\frac{\sqrt{(a^2 + b^2}}{\sqrt{c}}}$

$= \frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = a\sqrt{\frac{c}{a^2 + b^2}}$ ꝛc.

16.

Sind die geſuchten Zahlen x, y und z, ſo iſt

$$\text{I. } \frac{xy}{z} = a \text{ II. } \frac{xz}{y} = b \text{ III. } \frac{yz}{x} = c.$$

Man entwickle x aus (III.) und ſubſtituire den Werth in (I.), ſo erhält man $\frac{\frac{yz}{c}y}{z} = a$,

oder $\frac{y^2z}{cz} = a$, folgl. $y = \sqrt{ac}$.

Ferner ſetze man denſelben Werth von x in (II.), ſo ergiebt ſich $\frac{\frac{yz}{c}z}{y} = b$,

oder $\frac{yz^2}{cy} = b$, folglich $z = \sqrt{bc}$.

Endlich entwickle man y aus (II.) und ſetze den Werth in (I.), ſo giebt dieſer $\frac{\frac{xz}{b}x}{z} = a$,

oder $\frac{x^2z}{bz} = a$, folgl. $x = \sqrt{ab}$.

17.

Die Zahlen ſeien x, y und z. Es iſt alſo

$$\text{I. } xy = a \text{ II. } yz = b \text{ III. } xz = c.$$

Aus (II.) entwickle man y, und aus (III.) entwickle man x. Dieſe beiden Werthe ſetze man in (I.), ſo iſt

$$\frac{bc}{z^2} = a, \text{ folgl. } z = \sqrt{\frac{bc}{a}}.$$

Ferner entwickle man y aus (I.) und z aus (III.) und ſetze die Werthe in (II.), ſo erhält man

$$\frac{ac}{x^2} = b, \text{ folgl. } x = \sqrt{\frac{ac}{b}}.$$

Entwickelt man endlich x aus (I.) und z aus (II.) und ſubſtituirt dieſe Werthe in (III.), ſo giebt dieſes

$$\frac{ab}{y^2} = c, \text{ folgl. } y = \sqrt{\frac{ab}{c}}.$$

18.

Wenn die geſuchten 5 Zahlen x, y, z, u, w ſind, ſo iſt

$$\text{I. } xy = a \quad \text{II. } yz = b \quad \text{III. } zu = c$$

$$\text{IV. } uw = d \quad \text{V. } wx = e.$$

Man multiplicire dieſe 5 Gleichungen mit einander, ſo erhält man

$$x^2y^2z^2u^2w^2 = abcde,$$

$$\text{oder VI. } xyzuw = \sqrt{abcde}.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (I.) und (III.) und dividirt mit der hieraus entſtehenden Gleichung in (VI.), ſo erhält man

$$w = \frac{\sqrt{abcde}}{ac} = \sqrt{\frac{abcde}{a^2c^2}} = \sqrt{\frac{bde}{ac}}.$$

Multiplicirt man (II.) und (IV.) und dividirt in (VI.), ſo iſt

$$x = \frac{\sqrt{abcde}}{bd} = \sqrt{\frac{abcde}{b^2d^2}} = \sqrt{\frac{ace}{bd}}.$$

Multiplicirt man (III.) und (V.) und dividirt in (VI.), ſo iſt

$$y = \frac{\sqrt{abcde}}{ce} = \sqrt{\frac{abcde}{c^2e^2}} = \sqrt{\frac{abd}{ce}}.$$

Multiplicirt man (I.) und (IV.) und dividirt in (VI.), ſo iſt

$$z = \frac{\sqrt{abcde}}{ad} = \sqrt{\frac{abcde}{a^2d^2}} = \sqrt{\frac{bce}{ad}}.$$

Multiplicirt man endlich (II.) und (V.) und dividirt in (VI.), ſo iſt

$$u = \frac{\sqrt{abcde}}{be} = \sqrt{\frac{abcde}{b^2e^2}} = \sqrt{\frac{acd}{bd}}.\ ^{*)}$$

19.

Die 7 Zahlen ſeien x, y, z, t, u, v, w, ſo erhält man auf eine ähnliche Art, wie in der vorigen Aufgabe, 7 Gleichungen. Dieſe multiplicirt man mit einander, und zieht aus beiden Seiten die Quadratwurzel, wodurch man die 8te Gleichung erhält. Nun multiplicirt man (II.) mit (IV.) und mit (VI.)
(III.) mit (V.) und mit (VII.)
(I.) mit (IV.) und mit (VI.)
(II.) mit (V.) und mit (VII.)
(I.) mit (III.) und mit (VI.)
(II.) mit (IV.) und mit (VII.)
(I.) mit (III.) und mit (V.)

---

*) Die Aufgabe Nr 17. läßt ſich ebenſo, wie die gegenwärtige, auflöſen.

Mit dieſen 7 Producten dividirt man der Reihe nach in die 8te Gleichung, wodurch man den Werth für die 7 unbekannten Größen erhält.

20.

Die beiden Zahlen ſeien x und y, ſo iſt

$$\text{I.}\quad x - y = 8,$$

$$\text{und II.}\quad xy = 240.$$

Dieſe Gleichungen laſſen ſich ebenſo, wie die in Abſchn. IV. §. 2 S. 97 behandeln; denn da die Differenz von x und y gegeben iſt, ſo braucht man nur ihre Summe zu finden. Man erhebe daher beide Theile der Gleichung (I.) zum Quadrat und multiplicire (II.) mit 4, ſo iſt

$$\text{III.}\quad x^2 - 2xy + y^2 = 64,$$

$$\text{IV.}\quad 4xy = 960.$$

Addirt man beide Gleichungen, ſo erhält man

$$x^2 + 2xy + y^2 = 1024,$$

$$\text{oder V.}\quad x + y = 32.$$

Addirt man alſo (I.) und (V.) und beſtimmt x, ſo findet man

$$x = 20.$$

Subtrahirt man aber (I.) von (V.) und beſtimmt y, ſo findet man

$$y = 12.$$

21.

Die Auflöſung dieſer Aufgabe befindet ſich bereits in Abſchn. IV. §. 2. S. 96; ſie iſt daher hier weggeblieben.

22.

Die Zahl ſei = x, ſo iſt

$$x^2 - x = 306,$$

folgl. $x = \frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} + 306)} = 18.$

23.

Die Zahl ſei x, ſo iſt

$$\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} + 5x - 200 = 280 - x,$$

oder $x^2 + 72x = 5760,$

folgl. $x = -\frac{72}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{72}{2}\right)^2 + 5760\right]} = 48.$

24.

Er ſei x Jahr alt, folglich iſt ſeine Mutter $x + 20$ Jahr alt. Es iſt demnach

$$(x + 20)\,x - 2500 = 2x + 20,$$

oder $x^2 + 18x = 2520,$

folgl. $x = -\frac{18}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{18}{2}\right)^2 + 2520\right]} = 42$ Jahr.

25.

Die erſte Sorte wiege x Pfund und die zweite y Pfund, ſo iſt

$$x : y = 4 : 3,$$

alſo $3x = 4y$ oder I. $3x - 4y = 0.$

Nun koſtet das Pfund der erſten Sorte $\frac{x}{2}$ Gr., folglich koſten x Pfund $x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}$ Gr. Das Pfund der zweiten Sorte koſtet $\frac{x}{2} - 6$ Gr., alſo koſten y Pfund $y \cdot \left(\frac{x}{2} - 6\right) = \frac{xy - 12y}{2}$. Es iſt daher

$$\frac{x^2}{2} + \frac{xy - 12y}{2} = 5240 \text{ Gr.},$$

oder II. $x^2 + xy - 12y = 10480$.

Aus (I.) ergiebt ſich $x = \frac{4y}{3}$. Subſtituirt man dieſen Werth von x in (II.), ſo erhält man

$$\frac{16y^2}{9} + \frac{4y^2}{3} - 12y = 10480,$$

$$\text{oder } y^2 - \frac{27y}{7} = \frac{23580}{7},$$

$$\text{folgl. } y = \frac{27}{14} + \sqrt{\left[\left(\frac{27}{14}\right)^2 + \frac{23580}{7}\right]}$$

$= \frac{27}{14} + \sqrt{\frac{660969}{14^2}} = 60$ Pfund, Gewicht der zweiten Sorte.

Dieſen Werth von y in (I.) ſubſtituirt, giebt
$x = 80$ Pfund, Gewicht der erſten Sorte.

26.

Das erſte Stück halte x Ellen, ſo hält das zweite $x + 3$ und das dritte $x + 5$ Ellen. Da nun die Elle des erſten x Gr. koſtet, ſo koſten x Ellen x^2 Gr. Die Elle des zweiten koſtet $x + 10$ Gr., folglich koſten $x + 3$ Ellen $(x + 3)(x + 10) = x^2 + 13x + 30$ Gr. Die Elle des dritten koſtet $x + 20$ Gr., es koſten alſo $x + 5$ Ellen $(x + 5)(x + 20) = x^2 + 25x + 100$ Gr. Es iſt demnach

$$x^2 + x^2 + 13x + 30 + x^2 + 25x + 100 = 9530,$$

oder $3x^2 + 38x = 9400$,

alſo $x^2 + \frac{38x}{3} = \frac{9400}{3}$,

folgl. $x = -\frac{19}{3} + \sqrt{\left[\left(\frac{19}{3}\right)^2 + \frac{9400}{3}\right]}$

$= -\frac{19}{3} + \sqrt{\frac{28561}{3^2}}$

$= 50$ Ellen Länge des erſten Stückes.

27.

Das Vermögen des A ſei $= x$. Nun beſitzt B ſo oft 9 Thlr., als A 5 Thlr. hat. Es ſind aber 5 Thlr. $\frac{x}{5}$ mal in x enthalten, folglich beſitzt B $\frac{9x}{5}$ Thlr. Ferner hat C ſo oft 10 Thlr., als A 5 Thlr. beſitzt; es iſt daher das Vermögen des C $= \frac{10x}{5} = 2x$ Thlr. Multiplicirt man das Vermögen von A und B, ſo erhält man $\frac{9x^2}{5}$. Multiplicirt man das Vermögen von B und C, ſo giebt dieſes $\frac{18x^2}{5}$. Addirt man ferner das Vermögen von A, B und C, ſo erhält man $\frac{24x}{5}$. Es iſt daher, nach der Aufgabe,

$$\frac{9x^2}{5} + \frac{18x^2}{5} + \frac{24x}{5} = 8832,$$

oder $9x^2 + 8x = 14720$,

alſo $x^2 + \frac{8x}{9} = \frac{14720}{9}$,

$$\text{folgl. } x = -\frac{4}{9} + \sqrt{\left[\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \frac{14720}{9}\right]}$$

$$= -\frac{4}{9} + \sqrt{\frac{132496}{9^2}}$$

= 40 Thlr. Vermögen des A,
hieraus ergiebt ſich 72 Thlr. Vermögen des B,
und 80 Thlr. Vermögen des C.

28.

Er habe x Tücher gekauft. Da nun x Tücher 60 Thlr. gekoſtet haben, ſo koſtet ein Tuch $\frac{60}{x}$ Thlr. Hätte er drei Tücher mehr bekommen, ſo wären es $x + 3$ Tücher geweſen, und da dieſe ebenfalls 60 Thlr. gekoſtet hätten, ſo würde ein Tuch $\frac{60}{x + 3}$ gekoſtet haben. Der letztere Preis eines Tuches ſoll aber um einen Thaler wohlfeiler ſein, als der vorhergehende. Es iſt demnach

$$\frac{60}{x} = \frac{60}{x + 3} + 1,$$

$$\text{oder } x^2 + 3x = 180,$$

$$\text{folgl. } x = -\tfrac{3}{2} + \sqrt{[(\tfrac{3}{2})^2 + 180]} = 12 \text{ Tücher.}$$

29.

Es mögen anfänglich x Arme geweſen ſein; es kommt daher auf einen jeden $\frac{36}{x}$ Thlr. Sind es aber nur $x - 6$ Arme, ſo kommt auf jeden $\frac{36}{x - 6}$. Nun bekommt im letztern Falle jeder Arme $\frac{1}{12}$ Thlr. mehr, als im erſtern Falle; es iſt demnach

$$\frac{36}{x} + \frac{1}{12} = \frac{36}{x-6},$$

$$\text{oder } x^2 - 6x = 2592,$$

$$\text{folgl. } x = 3 + \sqrt{(3^2 + 2592)} = 54 \text{ Arme.}$$

30.

Er habe bei ſeinem Tode x Kinder. Es kommt daher auf jedes Kind $\frac{46800}{x}$. Nach dem Tode der beiden Kinder bleiben noch $x - 2$ übrig, und alsdann bekommt ein jedes $\frac{46800}{x-2}$. Nun bekommt im letztern Falle ein jedes Kind 1950 Thlr. mehr, als im erſtern Falle; es iſt demnach

$$\frac{46800}{x} + 1950 = \frac{46800}{x-2},$$

$$\text{oder } x^2 - 2x = 48,$$

$$\text{folgl. } x = 1 + \sqrt{(1 + 48)} = 8 \text{ Kinder.}$$

31.

Iſt die geſuchte Zahl = x, ſo iſt

$$\frac{c}{x} - \frac{c}{x+a} = d,$$

$$\text{oder } (x^2 + ax)\, d = cx + ac - cx,$$

$$\text{alſo } x^2 + ax = \frac{ac}{d},$$

$$\text{folgl. } x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + \frac{ac}{d}\right)}.$$

32.

Die Anzahl der Männer ſei $= x$, ſo iſt die Anzahl der Weiber $20 - x$. Da nun die Männer zuſammen 24 Thlr. verzehren, ſo verzehrt jeder einzelne $\frac{24}{x}$, und aus demſelben Grunde verzehrt jedes Weib $\frac{24}{20 - x}$. Nun verzehrt ein jeder Mann einen Thaler mehr, als jede Frau; es iſt demnach

$$\frac{24}{x} = \frac{24}{20 - x} + 1,$$

oder $x^2 - 68x = - 480$,

folgl. $x = 34 - \sqrt{(34^2 - 480)} = 8$ *) Männer, hieraus ergiebt ſich die Anzahl der Weiber $= 20 - 8 = 12$.

33.

Er habe für das Pferd x Thlr. gegeben. Nun gewinnt er beim Verkauf x Procent d. h. an je 100 Thlrn., die ihm das Pferd gekoſtet hat, gewinnt er x Thlr., folglich gewinnt er an den x Thlrn., die er bezahlt hat, $\frac{x^2}{100}$ Thlr., und alſo beträgt die Summe, für welche er das Pferd verkauft hat, $x + \frac{x^2}{100}$. Es iſt demnach

---

*) Hier iſt die Quadratwurzel negativ genommen worden, weil man im entgegengeſetzten Falle $x = 60$, und folglich für die Anzahl der Weiber $20 - 60 = - 40$ erhalten hätte, welcher negative Werth hier nicht anwendbar iſt.

$$\frac{x^2}{100} + x = 144,$$

oder $x^2 + 100x = 14400$,

folgl. $x = -50 + \sqrt{(50^2 + 14400)}$

$= 80$ Thlr. Einkaufspreis.

34.

Der Einkaufspreis betrage x Thlr. Nun koſtet ihm der Transport 4 Procent, dieſes macht auf x Thlr. $\frac{4x}{100} = \frac{x}{25}$; das Zeug hat alſo $x + \frac{x}{25} = \frac{26x}{25}$ Thlr. gekoſtet. Er verkauft die Waare und gewinnt dabei $\frac{x}{12}$ Procent d. h. an 100 Thlrn. gewinnt er $\frac{x}{12}$ Thlr.; folglich gewinnt er an $\frac{26x}{25}$ Thlrn. $\frac{x}{100 \cdot 12} \cdot \frac{26x}{25} = \frac{13x^2}{15000}$, und alſo beträgt die Summe, für welche er die Waare verkauft hat, $\frac{26x}{25} + \frac{13x^2}{15000}$. Es iſt daher

$$\frac{13x^2}{15000} + \frac{26x}{25} = 390,$$

oder $x^2 + 1200x = 450000$,

folgl. $x = -600 + \sqrt{(600^2 + 450000)}$

$= 300$ Thlr. Einkaufspreis.

35.

Die erſte habe x, die zweite 140 − x Eier gehabt. Nun ſpricht die erſte zur zweiten: Hätte ich 140 − x Eier gehabt, ſo würde ich 30 Gr. daraus gelöſt haben;

die erſte verkauft alſo jedes Ei zu $\frac{30}{140-x}$ Gr. und folglich löſt ſie für ihre x Eier $\frac{30x}{140-x}$ Gr. Die zweite ſpricht: Hätte ich x Eier gehabt, ſo würde ich $53\frac{1}{3}$ Gr. daraus gelöſt haben; die zweite verkauft alſo jedes Ei zu $\frac{53\frac{1}{3}}{x} = \frac{160}{3x}$ Gr., und folgl. erhält ſie für ihre $140-x$ Eier $\frac{160\,(140-x)}{3x}$ Gr. Sie haben, nach der Aufgabe, beide gleich viel gelöſt; es iſt demnach

$$\frac{30x}{140-x} = \frac{160\,(140-x)}{3x},$$

$$\text{alſo } 90x^2 = 160\,(140-x)^2,$$

$$\text{oder } 70x^2 - 44800x = -3136000,$$

$$x^2 - 640x = -44800,$$

$$\text{folgl. } x = 320 - \sqrt{(320^2 - 44800)}\ ^{*)}$$

$$= 80 \text{ Eier für die erſte Bäuerin,}$$

und alſo $y = 140 - 80 = 60$ Eier für die zweite Bäuerin.

36.

Der erſte habe x, der zweite $x+3$ Ellen verkauft. Der erſte ſpricht: Aus $x+3$ Ellen würde ich 24 Thlr. gelöſt haben; er verkauft alſo die Elle Zeug zu $\frac{24}{x+3}$ Thlr., und folglich erhält er für ſeine x Ellen $\frac{24x}{x+3}$ Thlr. Der zweite ſpricht: Aus x Ellen würde ich $12\frac{1}{2}$ Thlr. löſen; er verkauft alſo die Elle Zeug zu $\frac{12\frac{1}{2}}{x} = \frac{25}{2x}$ Thlr., und folglich erhält er für ſeine $x + 3$ Ellen $\frac{25\,(x + 3)}{2x}$ Thlr. Nach der Aufgabe löſen ſie zuſammen 35 Thlr.; es iſt daher

---

*) Siehe die Anmerkung zur 32ſten Auflöſung S. 295.

$$\frac{24x}{x + 3} + \frac{25\,(x + 3)}{2x} = 35,$$

$$\begin{aligned}
\text{alſo}\quad 48x^2 + 25\,(x + 3)^2 &= 70x^2 + 210x,\\
\text{oder}\quad 3x^2 - 60x &= -225,\\
x^2 - 20x &= -75,\\
\text{folgl.}\quad x &= 10 \pm \sqrt{(10^2 - 75)}\ ^{*)}\\
&= 15 \text{ Ellen für den erſten,}\\
&\text{und alſo 18 Ellen für den zweiten;}\\
&\text{oder auch 5 Ellen für den erſten,}\\
&\text{und alſo 8 Ellen für den zweiten.}
\end{aligned}$$

37.

Als ſich A und B begegnen, ſoll B x und alſo A $x + 30$ Meilen zurückgelegt haben. A iſt daher vom Orte D x Meilen entfernt, und wird in vier Tagen dort anlangen. Da er nun x Meilen in vier Tagen macht, ſo macht er eine Meile in $\frac{4}{x}$ Tagen; folglich hat er über den bereits zurückgelegten $x + 30$ Meilen $\frac{4\,(x + 30)}{x}$ Tage zugebracht. B iſt vom Orte C

---

*) Hier erhält man zwei Werthe für x, weil im gegenwärtigen Falle ſowohl die poſitive, als negative Quadratwurzel anwendbar iſt.

$x + 30$ Meilen entfernt, und wird in neun Tagen dort anlangen. Da er alſo $x + 30$ Meilen in neun Tagen macht, ſo macht er eine Meile in $\frac{9}{x + 30}$ Tagen; folglich hat er über den bereits zurückgelegten x Meilen $\frac{9x}{x + 30}$ Tage zugebracht. Da ſie nun beide zu gleicher Zeit von C und D ausgegangen ſind, ſo haben ſie eine gleiche Zeit auf die zurückgelegten Wege verwendet. Es iſt demnach

$$\frac{4\,(x + 30)}{x} = \frac{9x}{x + 30},$$

alſo $4\,(x + 30)^2 = 9x^2$,

oder $x^2 - 48x = 720$,

folgl. $x = 24 + \sqrt{(24^2 + 720)}$

$= 60$ Meilen, die B zurückgelegt hat,

mithin hat A 90 Meilen zurückgelegt.

Folglich iſt die Entfernung von C und D

$= 60 + 90 = 150$ Meilen.

Anmerk. Dieſes Reſultat kann man auf eine kürzere Art erhalten, wenn man aus beiden Theilen der Gleichung $4\,(x + 30)^2 = 9x^2$ die Quadratwurzel zieht. Dieſes giebt nämlich

$$2\,(x + 30) = 3x,$$

folgl. $x = 60$ ꝛc.

38.

Verfährt man hier ſo, wie in der vorigen Auflöſung, ſo erhält man die Gleichung

$$a\,(x + d)^2 = bx^2$$

Zieht man aus beiden Theilen dieſer Gleichung die Quadratwurzel, ſo erhält man

$$(x + d)\sqrt{a} = x\sqrt{b},$$

$$\text{oder } x(\sqrt{b} - \sqrt{a}) = d\sqrt{a},$$

folgl. $x = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$ der Weg, den B gemacht hat. Nun iſt der Weg, den A zurückgelegt hat, $= x + d$

$$= \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} + d = \frac{d\sqrt{a} + d\sqrt{b} - d\sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$$

$= \frac{d\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$. Es iſt demnach die Entfernung von C und D $= x + (x + d)$

$$= \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} + \frac{d\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} = \frac{d(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}.$$

39.

Der erſte habe x Thlr. und alſo der zweite 500 − x Thlr. eingelegt. Nun hat der erſte an Kapital und Gewinn 450 Thlr. zurückerhalten; er gewinnt alſo in 5 Monaten an x Thlrn. 450 − x, und folglich beträgt der Gewinn von einem Thaler in einem Monat $\frac{450 - x}{5x}$ Thlr. Ferner gewinnt der zweite in zwei Monaten an 500 − x Thlrn. 450 − (500 − x) = x − 50 Thlr., folglich beträgt der Gewinn von einem Thaler in einem Monat $\frac{x - 50}{2 \cdot (500 - x)}$ Thlr. Da nun die Kapitalien beider Kaufleute gleiche Procente tragen, ſo iſt

$$\frac{450 - x}{5x} = \frac{x - 50}{2\ (500 - x)},$$

alſo $2x^2 - 1900x + 450000 = 5x^2 - 250x$,

oder $x^2 + 550x = 150000$,

folgl. $x = -275 + \sqrt{(275^2 + 150000)}$

$= 200$ Thlr. Einlage des erſten,

und alſo 300 Thlr. die Einlage des andern.

40.

Der erſte habe x Thlr. und alſo der zweite 2000 — x Thlr. eingelegt. Nun hat der erſte an Kapital und Gewinn 1710 Thlr. zurückerhalten; er gewinnt alſo an x Thlrn. in 17 Monaten 1710 — x Thlr., folglich beträgt der Gewinn von einem Thaler in einem Monat $\frac{1710 - x}{17x}$. Ferner gewinnt der zweite an 2000 — x Thlrn. in 12 Monaten 1040 — (2000 — x) = x — 960 Thlr., folglich beträgt der Gewinn von einem Thaler in einem Monat $\frac{x - 960}{12 \cdot (2000 - x)}$ Thlr. Da nun die Kapitalien beider Kaufleute gleiche Procente tragen, ſo iſt

$$\frac{1710 - x}{17x} = \frac{x - 960}{12 \cdot (2000 - x)},$$

alſo $12x^2 - 44520x + 41040000 = 17x^2 - 16320x$,

oder $x^2 + 5640x = 8208000$,

folgl. $x = -2820 + \sqrt{(2820^2 + 8208000)}$

$= 1200$ Thlr. Einlage des erſten,

und alſo 800 Thlr. die Einlage des andern.

41.

Nennt man die beiden Zahlen x und y, ſo iſt

$$x + y = 41,$$

$$\text{und } x^2 + y^2 = 901.$$

Da dieſe Gleichungen bereits A. IV. §. 3. S. 98 im Allgemeinen aufgelöſt worden ſind, ſo braucht man nur in den daſelbſt gefundenen Formeln ſtatt a und b die hier gegebenen Zahlen 41 und 901 zu ſubſtituiren, und man erhält

$$x = \frac{41 - \sqrt{(2 \cdot 901 - 41^2)}}{2} = 15,$$

$$\text{und } y = \frac{41 + \sqrt{(2 \cdot 901 - 41^2)}}{2} = 26.$$

42.

Die Auflöſung dieſer Aufgabe führt unmittelbar zu den §. 3. S. 98 aufgeſtellten Gleichungen, und iſt daher hier weggeblieben.

43.

Hier erhält man

$$x - y = 8,$$

$$\text{und } x^2 + y^2 = 544.$$

Dieſe Gleichungen behandle man, wie die in dem ſo eben erwähnten §. 3. S. 99, ſo findet man hier auf dieſelbe Art die Summe beider Zahlen = 32, wie man dort die Differenz gefunden hat. Aus der Summe und der Differenz beider Zahlen findet man aber leicht die Zahlen 12 und 20 ſelbſt.

44.

Sind die Zahlen x und y, ſo iſt

$$xy = 255,$$

$$\text{und } x^2 + y^2 = 514.$$

Dieſe Gleichungen ſind §. 4. S. 99 allgemein aufgelöſt. Subſtituirt man daher in jenen allgemeinen Formeln 255 ſtatt a, und 514 ſtatt b, ſo findet man

$$x = \sqrt{\frac{514 + \sqrt{(514^2 - 4 \cdot 255^2)}}{2}} = 17,$$

$$\text{und } y = \sqrt{\frac{514 - \sqrt{(514^2 - 4 \cdot 255^2)}}{2}} = 15.$$

45.

Die beiden Theile ſeien x und y, ſo iſt

$$\text{I. } x + y = 16,$$

$$\text{II. } xy + x^2 + y^2 = 208.$$

Man quadrire beide Theile der Gleichung (I.), ſo erhält man

$$x^2 + 2xy + y^2 = 256.$$

Von dieſer Gleichung ſubtrahire man (II.), ſo bleibt

$$xy = 48.$$

Da nun hier die Summe zweier Zahlen und ihr Product gegeben iſt, ſo findet man nach den Formeln §. 2 S. 96 die beiden geſuchten Zahlen 4 und 12.

46.

Die Zahlen ſeien x und y, ſo iſt

$$x + y = 39,$$

$$\text{und } x^3 + y^3 = 17199.$$

Dieſe Gleichungen ſind im Allgemeinen aufgelöſt §. 5 S. 101. Hiernach iſt

$$x = \frac{39}{2} - \sqrt{\frac{4 \cdot 17199 - 39^3}{12 \cdot 39}} = 15,$$

$$\text{und } y = \frac{39}{2} + \sqrt{\frac{4 \cdot 17199 - 39^3}{12 \cdot 39}} = 24.$$

47.

Das Gehalt ſei = x Thlr., und die um 10 von einander unterſchiedenen Wurzeln der in der Aufgabe erwähnten Cubikzahlen ſeien y und y + 10; ſo iſt

$$\text{I. } x - 142 = y^3,$$

$$\text{und II. } x + 1578 = (y + 10)^3$$

$$= y^3 + 30y^2 + 300y + 1000.$$

Subtrahirt man (I.) von (II.) ſo bleibt

$$30y^2 + 300y + 1000 = 1720,$$

$$\text{oder } y^2 + 10y = 24,$$

$$\text{folgl. } y = -5 + \sqrt{(5^2 + 24)} = 2,$$

hieraus ergiebt ſich $x = 2^3 + 142 = 150$ Thlr.

48.

Die Zahl ſei x, ſo iſt

$$x + \sqrt{x} = 1332,$$

$$\text{oder } x - 1332 = -\sqrt{x}.$$

Erhebt man beide Theile der Gleichung zum Quadrat, ſo iſt

$$x^2 - 2664x + 1774224 = x,$$

$$\text{oder } x^2 - 2665x = -1774224,$$

$$\text{folgl. } x = \frac{2665}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{2665}{2}\right)^2 - 1774224\right]} = 1296.$$

49.

Die Zahl ſei x, ſo iſt

$$x - \sqrt{x} = 48\tfrac{3}{4} = \frac{195}{4},$$

$$\text{oder } 4x - 4\sqrt{x} = 195,$$

$$\text{alſo } 4x - 195 = 4\sqrt{x}.$$

Erhebt man beide Theile der Gleichung zum Quadrat, ſo iſt

$$16x^2 - 1560x + 38025 = 16x,$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{197x}{2} = -\frac{38025}{16},$$

$$\text{folgl. } x = \frac{197}{4} + \sqrt{\left[\left(\frac{197}{4}\right)^2 - \frac{38025}{16}\right]} = 56\tfrac{1}{4}.$$

50.

Der eine Theil von a ſei x, ſo iſt der andere Theil a — x. Der eine Theil von b ſei y, folglich iſt der andere Theil b — y. Es iſt demnach

$$x : y = m : n,$$

$$\text{alſo I. } nx = my,$$

$$\text{und } (a - x)(b - y) = p,$$

$$\text{oder II. } xy - bx - ay = p - ab.$$

Man entwickele x aus (I.) und ſetze den Werth in (II.), ſo erhält man

$$y^2 - \frac{an + bm}{m} y = \frac{np - abn}{m},$$

folglich

$$y = \frac{an + bm}{2m} \pm \sqrt{\frac{a^2n^2 + 2abmn + b^2m^2 + 4mnp - 4abmn}{4m^2}}$$

$$= \frac{an + bm \pm \sqrt{[(an - bm)^2 + 4mnp]}}{2m},$$

und $x = \frac{an + bm \pm \sqrt{[(an - bm)^2 + 4mnp]}}{2n}$.

Um nun das Verhältniß der beiden für x und y erhaltenen Werthe zu finden, muß man einen gemeinſchaftlichen Nenner ſuchen, und dieſer iſt 2mn; man muß daher den Werth von y mit n, und den von x mit m multipliciren. Setzt man demnach

$$\frac{an + bm \pm \sqrt{[(an - bm)^2 + 4mnp]}}{2mn} = A,$$

ſo iſt $x = mA$ und $y = nA$,

woraus ſich ergiebt, daß ſich beide Zahlen, wie $m : n$ verhalten.

51.

Die erſten Theile beider Zahlen ſeien x und y, ſo ſind die andern Theile $a - x$ und $b - y$. Es iſt demnach

$$x : y = m : n,$$

oder I. $my = nx$.

Ferner iſt $(a - x)^2 + (b - y)^2 = s$,

oder II. $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = s - a^2 - b^2$.

Entwickelt man y aus (I.) und ſetzt den Werth in (II.), ſo erhält man

$$x^2 + \left(\frac{nx}{m}\right)^2 - 2ax - \frac{2bnx}{m} = s - a^2 - b^2,$$

oder $x^2 - \frac{2am^2 + 2bmn}{m^2 + n^2}x = \frac{(s - a^2 - b^2)\,m^2}{m^2 + n^2}$, folglich

$$x=\frac{am^2+bmn}{m^2+n^2}\pm\sqrt{\left[\left(\frac{am^2+bmn}{m^2+n^2}\right)^2+\frac{(s-a^2-b^2)m^2}{m^2+n^2}\right]}$$

$$=\frac{m\left[am+bn\pm\sqrt{[(am+bn)^2+(m^2+n^2)(s-a^2-b^2)]}\right]}{m^2+n^2}.$$

Für y erhält man denſelben Ausdruck, nur muß ſtatt des gemeinſchaftlichen Factors m der gemeinſchaftliche Factor n geſetzt werden. Iſt daher der Kürze wegen

$$\frac{am+bn\pm\sqrt{[(am+bn)^2+(m^2+n^2)(s-a^2-b^2)]}}{m^2+n^2}=A,$$

ſo iſt $x = mA$ und $y = nA$,

und beide Theile verhalten ſich alſo, wie $m : n$.

52.

Die Zahlen ſeien x und y, ſo iſt

$$x - y + x^2 - y^2 = 150,$$

$$x + y + x^2 + y^2 = 330.$$

Dieſe Gleichungen ſind im Allgemeinen Abſchn. IV. §. 11. S. 109 aufgelöſt. Subſtituirt man daher ſtatt a 330, und ſtatt b 150, ſo iſt

$$x=\frac{-1+\sqrt{(2\cdot330+2\cdot150+1)}}{2}=\frac{-1+\sqrt{961}}{2}=15,$$

$$y=\frac{-1+\sqrt{(2\cdot330-2\cdot150+1)}}{2}=\frac{-1+\sqrt{361}}{2}=9.$$

53.

Die Zahlen ſeien x und y, ſo iſt

I. $x + y = xy$,

II. $x + y = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$.

Dividirt man beide Theile der Gleichung (II.) durch $x + y$, ſo erhält man

$$\text{III. } x - y = 1.$$

Addirt man (I.) und (III.), ſo iſt

$$2x = xy + 1,$$

$$\text{oder IV. } xy = 2x - 1.$$

Nun ergiebt ſich aus (III.)

$$y = x - 1.$$

Subſtituirt man dieſen Werth von y in (IV.), ſo iſt

$$x(x - 1) = 2x - 1,$$

$$\text{oder } x^2 - 3x = -1,$$

$$\text{folgl. } x = \frac{3}{2} + \sqrt{\left(\frac{9}{4} - 1\right)} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

und alſo

$$y = x - 1 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{3 \pm \sqrt{5} - 2}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Daß übrigens dieſe für x und y gefundenen Werthe der Aufgabe ein Genüge leiſten, erhellet aus dem Folgenden. Es iſt

$$x + y = \frac{3 \pm \sqrt{5} + 1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}.$$

$$\text{Ferner } xy = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5} \pm 3\sqrt{5} + 5}{4}$$

$$= \frac{8 \pm 4\sqrt{5}}{4} = 2 \pm \sqrt{5}.$$

$$\text{Endlich } x^2 - y^2 = \frac{9 \pm 6\sqrt{5} + 5}{4} - \frac{1 \pm 2\sqrt{5} + 5}{4}$$

$$= \frac{9 + 5 - 1 - 5 \pm 4\sqrt{5}}{4} = \frac{8 \pm 4\sqrt{5}}{4} = 2 \pm \sqrt{5}.$$

54.

Nennt man zwei der zu ſuchenden Zahlen x und y, ſo iſt die dritte $= \frac{y^2}{x}$, weil nämlich, nach der Aufgabe, $x : y = y : z$ ſein ſoll. Es iſt demnach

$$\text{I. } x + y + \frac{y^2}{x} = 126.$$

$$\text{Ferner } x \cdot y \cdot \frac{y^2}{x} = y^3 = 13824,$$

$$\text{folglich } y = 24.$$

Subſtituirt man dieſen Werth von y in (I.), ſo erhält man

$$x + 24 + \frac{24^2}{x} = 126,$$

$$\text{oder } x^2 - 102x = -576,$$

$$\text{folglich } x = 51 + \sqrt{(51^2 - 576)} = 96,$$

und alſo iſt die dritte Zahl

$$\frac{y^2}{x} = \frac{24^2}{96} = 6.$$

55.

Die Ziffern der geſuchten Zahlen mögen x, y, z ſein, alſo die Zahl den Werth $x + 10y + 100z$ haben, ſo iſt

$$\text{I. } x^2 + y^2 + z^2 = 104,$$

$$\text{II. } y^2 = 2xz + 4,$$

$$\text{und } x + 10y + 100z - 594 = 100x + 10y + z,$$

$$\text{oder } 99x - 99z = -594,$$

$$\text{oder III. } x - z = -6.$$

Subſtituirt man in (I.) ſtatt y^2 den ihm gleichen Werth $2xz + 4$ aus (II.), ſo iſt

$$x^2 + 2xz + 4 + z^2 = 104,$$

$$\text{oder } x^2 + 2xz + z^2 = 100,$$

$$\text{folgl. IV. } x + z = 10.$$

Addirt man nun (III.) und (IV.), ſo findet man

$$x = 2 \text{ für die Einer;}$$

ſubtrahirt man (III.) von (IV.), ſo bleibt

$$z = 8 \text{ für die Hunderter,}$$

und alſo aus (II.)

$$y = \sqrt{(2xz + 4)} = \sqrt{(2 \cdot 2 \cdot 8 + 4)} = 6.$$

Die geſuchte Zahl iſt daher 862.

56.

Die Zahlen ſeien x und y, ſo iſt

$$(x - y)(x^2 - y^2) = 160,$$

$$(x + y)(x^2 + y^2) = 580.$$

Die Auflöſung dieſer Gleichungen im Allgemeinen findet ſich Abſchn. IV. §. 14. S. 112. Hiernach iſt, wenn man ſtatt a 160, und ſtatt b 580 ſubſtituirt,

$$x = \frac{\sqrt{(2 \cdot 580 - 160)} + \sqrt{160}}{2\sqrt[6]{(2 \cdot 580 - 160)}} = \frac{\sqrt{100 \cdot 10} + \sqrt{16 \cdot 10}}{2\sqrt[3]{\sqrt{1000}}}$$

$$= \frac{10\sqrt{10} + 4\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = \frac{14\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = \frac{14}{2} = 7,$$

$$\text{und } y = \frac{10\sqrt{10} - 4\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = \frac{6}{2} = 3.$$

57.

Die Zahlen ſeien x und y, ſo iſt

$$\text{I. } x + y + xy = 34,$$
$$\text{II. } x^2 + y^2 - (x + y) = 42.$$

Man ſetze III. $x + y = 34 - xy = t$, ſo iſt aus (II.)

$$x^2 + y^2 - t = 42.$$

Nun läßt ſich $x^2 + y^2$ ebenfalls durch t ausdrücken. Denn es iſt erſtlich

$$t^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

und aus (III.) ergiebt ſich $xy = 34 - t$, folglich iſt

$$t^2 = x^2 + y^2 + 68 - 2t,$$
$$\text{alſo } x^2 + y^2 = t^2 + 2t - 68.$$
$$\text{Es iſt demnach } t^2 = -2t + 68 + t + 42,$$
$$\text{oder } t^2 + t = 110,$$
$$\text{folgl. } t = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{(\tfrac{1}{4} + 110)} = 10 = x + y,$$
$$\text{und alſo } xy = 34 - t = 34 - 10 = 24.$$

Da nunmehr die Summe und das Product der Zahlen x und y bekannt iſt, ſo braucht man nur in den §. 2. S. 97 befindlichen Formeln 10 ſtatt a und 24 ſtatt b zu ſubſtituiren; hierdurch erhält man

$$x = \frac{10 - \sqrt{(10^2 - 4 \cdot 24)}}{2} = 4,$$

$$\text{und } y = \frac{10 + \sqrt{(10^2 - 4 \cdot 24)}}{2} = 6.$$

58.

Die beiden Zahlen mögen wieder x und y ſein, ſo iſt

$$\text{I. } x + y + xy = a,$$
$$\text{II. } x^2 + y^2 - (x + y) = b.$$

Man ſetze III. $x + y = a - xy = t$,
ſo iſt aus (II.)

$x^2 + y^2 - t = b$ oder IV. $x^2 + y^2 = b + t$. Nun läßt ſich $x^2 + y^2$ ebenfalls durch t ausdrücken. Denn es iſt erſtlich

$$t^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

und aus (III.) ergiebt ſich V. $xy = a - t$, folglich iſt

$$t^2 = x^2 + y^2 + 2a - 2t,$$

$$\text{alſo } x^2 + y^2 = t^2 + 2t - 2a.$$

Es iſt demnach aus (IV.) $b + t = t^2 + 2t - 2a$,

$$\text{oder } t^2 + t = 2a + b,$$

$$\text{folgl. } t = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} + 2a + b)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{(1 + 8a + 4b)}}{2} = x + y,$$

und aus (V.) $xy = \dfrac{2a + 1 \mp \sqrt{(1 + 8a + 4b)}}{2}$.

Setzt man daher der Kürze wegen

$$\frac{-1 \pm \sqrt{(1 + 8a + 4b)}}{2} = A,$$

$$\text{und } \frac{2a + 1 \mp \sqrt{(1 + 8a + 4b)}}{2} = B,$$

und ſubſtituirt dieſe Werthe in den Seite 97 §. 2 befindlichen Formeln für die dortige Summe a und das Product b, ſo erhält man

$$x = \frac{A \pm \sqrt{(A^2 - 4B)}}{2}; \; y = \frac{A \mp \sqrt{(A^2 - 4B)}}{2}.$$

59.

Da die Summe beider Zahlen bekannt iſt, ſo kommt es nur darauf an, die Differenz derſelben zu finden.

Es ſei daher die Differenz beider Zahlen = d, ſo iſt die eine Zahl $\frac{a+d}{2}$ und die andere $\frac{a-d}{2}$.

Es iſt demnach $\left(\frac{a+d}{2}\right)^4 + \left(\frac{a-d}{2}\right)^4 = b$,

oder $a^4 + 4a^3d + 6a^2d^2 + 4ad^3 + d^4$,

$$+ a^4 - 4a^3d + 6a^2d^2 - 4ad^3 + d^4 = 16b,$$

oder $d^4 + 6a^2d^2 = 8b - a^4$,

$$d^4 + 6a^2d^2 + 9a^4 = 8b - a^4 + 9a^4 = 8a^4 + 8b,$$

$$d^2 + 3a^2 = \pm\sqrt{(8a^4 + 8b)},$$

alſo $d^2 = -3a^2 \pm \sqrt{(8a^4 + 8b)}$,

folgl. $d = \sqrt{[-3a^2 \pm \sqrt{(8a^4 + 8b)}]}$.

60.

Hier iſt abermals die Summe beider Zahlen gegeben, ihre Differenz ſei daher = d, ſo ſind die Zahlen ſelbſt

$$\frac{a+d}{2} \text{ und } \frac{a-d}{2}.$$

Es iſt demnach

$$a^5 + 5a^4d + 10a^3d^2 + 10a^2d^3 + 5ad^4 + d^5$$

$$+ a^5 - 5a^4d + 10a^3d^2 - 10a^2d^3 + 5ad^4 - d^5 = 32b,$$

oder $2a^5 + 20a^3d^2 + 10ad^4 = 32b$,

$$5ad^4 + 10a^3d^2 = 16b - a^5,$$

$$d^4 + 2a^2d^2 = \frac{16b - a^5}{5a},$$

$$d^4 + 2a^2d^2 + a^4 = \frac{16b - a^5 + 5a^5}{5a} = \frac{4(a^5 + 4b)}{5a},$$

$$d^2 + a^2 = \pm 2\sqrt{\frac{a^5 + 4b}{5a}},$$

$$\text{alſo } d^2 = -a^2 \pm 2\sqrt{\frac{a^5+4b}{5a}},$$

$$\text{folgl. } d = \pm\sqrt{\left(-a^2 \pm 2\sqrt{\frac{a^5+4b}{5a}}\right)}.$$

Die Zahlen ſelbſt ſind demnach

$$\frac{a \pm \sqrt{\left(-a^2 \pm 2\sqrt{\frac{a^5+4b}{5a}}\right)}}{2}$$

$$\text{und } \frac{a \mp \sqrt{\left(-a^2 \pm 2\sqrt{\frac{a^5+4b}{5a}}\right)}}{2}.$$

Multiplicirt man beide Zahlen mit einander, ſo erhält man

$$p = \frac{a^2 - \left(-a^2 \pm 2\sqrt{\frac{a^5+4b}{5a}}\right)}{4} = \tfrac{1}{2}\left[a^2 \mp \sqrt{\frac{a^5+4b}{5a}}\right],$$

welcher Ausdruck in derſelben Art von dem Herrn Verfaſſer der Aufgaben angegeben iſt.

61.

Die Differenz beider Zahlen ſei $= d$, ſo ſind die Zahlen ſelbſt $\frac{a+d}{2}$ und $\frac{a-d}{2}$.

Es iſt demnach

$$\left[\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-d}{2}\right)^2\right]\left(\frac{a^2-d^2}{4}\right) = b,$$

$$\text{oder } \frac{2a^2+2d^2}{4} \cdot \frac{a^2-d^2}{4} = b,$$

$$2a^4 + 2a^2d^2 - 2a^2d^2 - 2d^4 = 16b,$$

$$\text{alſo } d = \pm\sqrt[4]{(a^4 - 8b)}.$$

Die beiden Zahlen ſind daher

$$\frac{a + \sqrt[4]{(a^4 - 8b)}}{2} \text{ und } \frac{a - \sqrt[4]{(a^4 - 8b)}}{2}.$$

Das Product dieſer beiden Zahlen iſt alſo, wie auch der Herr Verfaſſer der Aufgaben angiebt,

$$= \tfrac{1}{4}[a^2 - \sqrt{(a^4 - 8b)}].$$

62.

Die beiden geſuchten Zahlen ſeien x und y, ſo iſt

$$x + y + x^2 + y^2 = a,$$

$$\text{und } m(x^2 + y^2) + nxy = b.$$

Man ſetze $x + y = s$ und $xy = p$, ſo iſt

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = s^2 - 2p.$$

Es iſt demnach

$$\text{I. } s + s^2 - 2p = a,$$

$$\text{und II. } ms^2 - 2mp + np = b.$$

Aus (I.) ergiebt ſich

$$\text{III. } p = \frac{s^2 + s - a}{2}.$$

Subſtituirt man dieſen Ausdruck in (II.), ſo erhält man

$$ms^2 - ms^2 - ms + ma + n\,\frac{s^2 + s - a}{2} = b,$$

oder IV. $ns^2 + (n - 2m)s = 2b + (n - 2m)\,a.$

Entwickelt man hieraus s, und ſetzt dieſen Werth und den von p in die quadratiſche Gleichung

$$x^2 - sx + p = 0,$$

ſo erhält man die geſuchten Werthe beider Größen.

63.

Die beiden erſten Glieder der Proportion ſeien x und y, ſo iſt das dritte Glied $a - x$ und das vierte $b - y$. Die Proportion iſt demnach

$$y : x = a - x : b - y,$$

hieraus ergiebt ſich $by - y^2 = ax - x^2$.

Ferner iſt, nach der Aufgabe,

$$y^2 + x^2 + (a - x)^2 + (b - y)^2 = c,$$

oder, wenn man die beiden letzten Glieder wirklich zum Quadrat erhebt, und die bekannten von den unbekannten Größen trennt,

$$y^2 + x^2 - ax - by = \frac{c - a^2 - b^2}{2},$$

oder auch $by - y^2 + ax - x^2 = \frac{a^2 + b^2 - c}{2}$.

Da aber $by - y^2 = ax - x^2$,

ſo iſt $2(ax - x^2) = \frac{a^2 + b^2 - c}{2}$,

$$\text{alſo } ax - x^2 = \frac{a^2 + b^2 - c}{4},$$

gleich dem Product der beiden mittlern oder äußern Glieder. Aus der Summe und dem Producte zweier Zahlen laſſen ſich nun nach den in Abſchn. IV. §. 2. Seite 97 aufgeſtellten Formeln die Zahlen ſelbſt finden. Denn es iſt hiernach

$$x = \frac{a \pm \sqrt{\left(a^2 - 4 \cdot \frac{a^2 + b^2 - c}{4}\right)}}{2} = \tfrac{1}{2}\left[a \pm \sqrt{(c - b^2)}\right],$$

folglich iſt das dritte Glied der Proportion, welches gleich war $a - x$,

$$= a - \tfrac{1}{2}[a \pm \sqrt{(c - b^2)}] = \tfrac{1}{2}[a \mp \sqrt{(c - b^2)}].$$

Auf eine ähnliche Art erhält man

$$y = \frac{b \pm \sqrt{\left(b^2 - 4 \cdot \frac{a^2 + b^2 - c}{4}\right)}}{2} = \tfrac{1}{2}[b \pm \sqrt{(c - a^2)}],$$

und alſo das vierte Glied, welches gleich war $b - y$,

$$= b - \tfrac{1}{2}[b \pm \sqrt{(c - a^2)}] = \tfrac{1}{2}[b \mp \sqrt{(c - a^2)}].$$

Die ganze Proportion hat demnach folgende Geſtalt:

$$\tfrac{1}{2}[b \pm \sqrt{(c - a^2)}] : \tfrac{1}{2}[a \pm \sqrt{(c - b^2)}]$$
$$= \tfrac{1}{2}[a \mp \sqrt{(c - b^2)}] : \tfrac{1}{2}[b \mp \sqrt{(c - a^2)}].$$

64.

Wenn auch hier die beiden erſten Glieder der Proportion gleich y und x geſetzt werden, ſo ſind die beiden andern $x + a$ und $y + b$. Es iſt daher

$$y : x = x + a : y + b.$$

Setzt man nun auf eben die Art, wie in der vorhergehenden Auflöſung, die Schlüſſe fort, ſo findet man leicht das verlangte Reſultat.

Dieſe Aufgabe, ſo wie auch die vorige, läßt ſich auf folgende Art kürzer auflöſen.

Die Differenz der äußern und mittlern Glieder iſt gegeben, es kommt alſo nur auf ihre Summe an. Es ſei daher die Summe der äußern Glieder $= S$ und die der mittlern $= s$, ſo hat die Proportion folgende Geſtalt:

$$\frac{S+b}{2} : \frac{s+a}{2} = \frac{s-a}{2} : \frac{S-b}{2}.$$

Multiplicirt man die äußern und mittlern Glieder mit einander, und läßt den gemeinſchaftlichen Nenner weg, ſo erhält man

$$S^2 - b^2 = s^2 - a^2,$$

$$\text{oder } s^2 = a^2 - b^2 + S^2.$$

Ferner iſt $\frac{2S^2 + 2b^2 + 2s^2 + 2a^2}{4} = c$,

$$\text{oder } s^2 = 2c - a^2 - b^2 - S^2.$$

Es iſt demnach

$$a^2 - b^2 + S^2 = 2c - a^2 - b^2 - S^2,$$

$$\text{oder } S = \sqrt{(c - a^2)}.$$

Hieraus ergiebt ſich die geſuchte Proportion:

$$\tfrac{1}{2}\,[-b + \sqrt{(c - a^2)}] : \tfrac{1}{2}\,[-a + \sqrt{(c - b^2)}]$$

$$= \tfrac{1}{2}\,[a + \sqrt{(c - b^2)}] : \tfrac{1}{2}\,[b + \sqrt{(c - a^2)}].$$

Auch ſieht man leicht, daß das Product der beiden äußern oder mittlern Glieder gleich iſt, nämlich:

$$\frac{c - a^2 - b^2}{4}.$$

65.

Aus der Summe und dem Producte zweier Größen kann man immer die Größen ſelbſt finden. Hier iſt das Product gegeben, man braucht daher nur die Summe zu ſuchen. Nun iſt die Summe aller 4 Größen $= b$, man hat alſo die Summe von beiden Summen, und es kommt nur darauf an, die Differenz von dieſen beiden Summen zu finden. Dieſe Differenz ſei $= A$

und die äußere Summe ſei größer, als die mittlere, ſo iſt die Summe der äußern Glieder = $\frac{b+A}{2}$ und die der mittlern = $\frac{b-A}{2}$. Da man nun ferner nur die Differenz der beiden äußern Glieder und die der beiden mittlern zu wiſſen braucht, um die 4 Glieder ſelbſt zu erhalten, ſo ſetze man die Differenz der beiden äußern Glieder = d, ſo iſt das erſte Glied

$$\frac{\frac{b+A}{2}}{2}+\frac{d}{2}=\frac{b+A+2d}{4},$$

und das vierte Glied

$$\frac{\frac{b+A}{2}}{2}-\frac{d}{2}=\frac{b+A-2d}{4}.$$

Endlich ſetze man die Differenz der beiden mittlern Glieder = D, ſo iſt das zweite Glied

$$\frac{\frac{b-A}{2}}{2}+\frac{D}{2}=\frac{b-A+2D}{4},$$

und das dritte Glied

$$\frac{\frac{b-A}{2}}{2}-\frac{D}{2}=\frac{b-A-2D}{4}.$$

Die geſuchte Proportion hat daher folgende Geſtalt:

$$\frac{b+A+2d}{4}:\frac{b-A+2D}{4}=\frac{b-A-2D}{4}:\frac{b+A-2d}{4}.$$

Multiplicirt man nun die beiden äußern Glieder und ſchafft den gemeinſchaftlichen Nenner weg, ſo erhält man die Gleichung:

$$\text{I.}\quad b^2 + 2bA + A^2 - 4d^2 = 16a,$$

und durch die Multiplication der beiden mittlern Glieder findet man die Gleichung:

$$\text{II.}\quad b^2 - 2bA + A^2 - 4D^2 = 16a.$$

Erhebt man ferner die einzelnen Glieder der Proportion zum Quadrat, ſo iſt

Quadr. des 1. Gl. $\frac{b^2+2bA+A^2+2bd+2Ad+4d^2}{16}$,

Quadr. des 4. Gl. $\frac{b^2+2bA+A^2-2bd-2Ad+4d^2}{16}$,

Summe beider Quadrate $\frac{2b^2 + 4bA + 2A^2 + 8d^2}{16}$.

Quadr. des 2. Gl. $\frac{b^2-2bA+A^2+2bD-2AD+4D^2}{16}$,

Quadr. des 3. Gl. $\frac{b^2-2bA+A^2-2bD+2AD+4D^2}{16}$,

Summe beider Quadrate $\frac{2b^2 - 4bA + 2A^2 + 8D^2}{16}$.

Die Summe ſämmtlicher Quadrate iſt demnach

$$\frac{4b^2 + 4A^2 + 8(D^2 + d^2)}{16}.$$

Hieraus erhält man die Gleichung

$$\text{III.}\quad 4b^2 + 4A^2 + 8(D^2 + d^2) = 16c.$$

Addirt man die Gleichungen (I.) und (II.), ſo erhält man

$$\text{IV.}\quad 2b^2 + 2A^2 - 4(D^2 + d^2) = 32a.$$

Multiplicirt man ferner (IV.) mit 2 und addirt dieſe Gleichung zu (III.), ſo findet man

$$8b^2 + 8A^2 = 16c + 64a,$$

und hieraus $A = \sqrt{(8a + 2c - b^2)}$.

Auf Seite 97 befinden ſich die Formeln für den Fall, wenn die Summe und das Product zweier Größen gegeben ſind. Dort iſt die Summe durch a und das Product durch b, hier ſind die Summen durch $\frac{b \pm A}{2}$ und das Product durch a ausgedrückt. Subſtituirt man daher dieſe Werthe für jene, ſo erhält man für das erſte und vierte Glied

$$\frac{\frac{b+\sqrt{(8a+2c-b^2)}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2+8a+2c-b^2+2bA}{4} - 4a\right)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{b+A}{2} \pm \sqrt{\frac{2c-8a+2bA}{4}}}{2} = \frac{\frac{b+A\pm\sqrt{(2c-8a+2bA)}}{2}}{2}$$

$$= \tfrac{1}{4}\,[b + A \pm \sqrt{(2c - 8a + 2bA)}].$$

Auf gleiche Art findet man das zweite und dritte Glied

$$= \tfrac{1}{4}\,[b - A \pm \sqrt{(2c - 8a - 2bA)}].$$

Die Proportion ſelbſt hat demnach folgende Geſtalt:

$$\tfrac{1}{4}\,[b + A + \sqrt{(2c - 8a + 2bA)}] :$$
$$\tfrac{1}{4}\,[b - A - \sqrt{(2c - 8a - 2bA)}]$$
$$= \tfrac{1}{4}\,[b - A + \sqrt{(2c - 8a - 2bA)}] :$$
$$\tfrac{1}{4}\,[b + A - \sqrt{(2c - 8a + 2bA)}].$$

66.

Dieſe Aufgabe wird auf eine ähnliche Art, wie die vorhergehende, aufgelöſt.

67.

Die Summe der beiden äußern Glieder ſei = x, ſo iſt die Summe der beiden mittlern = b − x. Ferner ſei die Differenz der äußern Glieder = d und die der mittlern = D, ſo iſt die Form der verlangten Proportion folgende:

$$\frac{x + d}{2} : \frac{b - x + D}{2} = \frac{b - x - D}{2} : \frac{x - d}{2}.$$

Multiplicirt man nun die beiden äußern Glieder, und ſchafft den gemeinſchaftlichen Nenner weg, ſo erhält man die Gleichung

$$\text{I.}\quad x^2 - d^2 = 4a,$$

und durch die Multiplication der beiden mittlern Glieder erhält man

$$\text{II.}\quad b^2 - 2bx + x^2 - D^2 = 4a.$$

Erhebt man ferner die einzelnen Glieder der Proportion zum Quadrat, ſo iſt

Quadr. des erſten Gl. $\frac{x^2 + 2xd + d^2}{4}$,

Quadr. des vierten Gl. $\frac{x^2 - 2xd + d^2}{4}$,

Summe der Quad. der beid. äuß. Gl. $\frac{2x^2 + 2d^2}{4}$.

Quadr. des zweiten Gl. $\frac{b^2 - 2bx + x^2 + 2bD - 2Dx + D^2}{4}$,

Quadr. der dritten Gl. $\frac{b^2 - 2bx + x^2 - 2bD + 2Dx + D^2}{4}$,

Summe der Quadrate der beid. mittlern Gl. $\frac{2b^2 - 4bx + 2x^2 + 2D^2}{4}$.

Subtrahirt man daher die letztere Summe von der erſtern, ſo findet man

$$\frac{2\,(d^2 - D^2) + 4bx - 2b^2}{4},$$

und dieſes giebt die Gleichung

$$\text{III.}\quad 2(d^2 - D^2) + 4bx - 2b^2 = 4c.$$

Subtrahirt man die Gleichung (I.) von (II.), ſo bleibt

$$\text{IV.}\quad b^2 - 2bx + d^2 - D^2 = 0.$$

Multiplicirt man nun (IV.) mit 2, und ſubtrahirt dieſe Gleichung von (III.), ſo bleibt

$$-4b^2 + 8bx = 4c,$$

$$\text{folgl. } x = \frac{b^2 + c}{2b}.$$

Mithin muß die Summe der beiden mittlern Glieder

$$= \frac{b^2 - c}{2b}$$

ſein, weil nämlich die Summe aller vier Glieder alsdann $= \frac{b^2 + c}{2b} + \frac{b^2 - c}{2b}$, welche Summe $= b$ iſt, wie vorausgeſetzt worden.

Hiernach hat man alſo die Summe und das Product zweier Größen, woraus ſich bekanntlich die Größen ſelbſt herleiten laſſen.

68.

Aus der Summe zweier Größen und aus der Quadratſumme derſelben laſſen ſich die Größen ſelbſt herleiten. Da nun die Summe der drei Glieder ſowohl, als auch ihre Quadratſumme gegeben iſt, ſo braucht man nur das mittlere Glied zu kennen, und ſolches von beiden Summen abzuziehen, wo dann die Reſte die nöthigen data angeben.

Man ſetze daher die Summe des erſten und dritten Gliedes = x und ihre Differenz = d, ſo iſt das erſte Glied $= \frac{x+d}{2}$,

das dritte Glied $= \frac{x-d}{2}$,

und das mittlere Glied $= a-x$.

Bei einer ſtetigen Proportion iſt das Product der äußern Glieder gleich dem Quadrate des mittlern Gliedes. Es iſt demnach

$$\frac{x^2-d^2}{4} = a^2-2ax+x^2,$$

oder I. $3x^2-8ax+4a^2+d^2=0$.

Ferner iſt die Summe der Quadrate der drei Glieder

$$= \frac{x^2+d^2}{2}+a^2-2ax+x^2.$$

Hieraus erhält man die Gleichung

$$\frac{x^2+d^2}{2}+a^2-2ax+x^2=b,$$

oder II. $3x^2-4ax+2a^2+d^2=2b$.

Subtrahirt man (II.) von (I.), ſo bleibt

$$4ax-2a^2=2b,$$

folgl. $x=\frac{a^2+b}{2a}$.

Hieraus ergiebt ſich das mittlere Glied

$$=\frac{a^2-b}{2a},$$

weil nämlich $\frac{a^2+b}{2a}+\frac{a^2-b}{2a}=a$.

Da nun das mittlere Glied bekannt iſt, ſo braucht man es nur zum Quadrat zu erheben und von b abzuziehen, um die Quadratſumme der äußern Glieder zu erhalten. Dieſe iſt alſo

$$= b - \frac{a^4 - 2a^2b + b^2}{4a^2} = \frac{6a^2b - a^4 - b^2}{4a^2}.$$

Subſtituirt man daher die hier gefundenen Werthe für die Summe und die Quadratſumme der äußern Glieder in den S. 98. §. 3 befindlichen Formeln, ſo erhält man die äußern Glieder

$$= \frac{\frac{a^2 + b}{2a} \pm \sqrt{\left(2\frac{6a^2b - a^4 - b^2}{4a^2} - \frac{a^4 + 2a^2b + b^2}{4a^2}\right)}}{2}$$

$$= \frac{a^2 + b \pm \sqrt{(10a^2b - 3a^4 - 3b^2)}}{4a}$$

$$= \frac{a^2 + b \pm \sqrt{[(3b - a^2)\ (3a^2 - b)]}}{4a}.$$

69.

Behält man die Benennungen, wie in der vorhergehenden Auflöſung, bei, ſo iſt auch hier

$$\text{I. } 3x^2 - 8ax + 4a^2 + d^2 = 0.$$

Ferner iſt die Differenz, welche man erhält, wenn von der Summe der Quadrate der äußern Glieder das Quadrat des mittlern Gliedes abgezogen wird,

$$= \frac{x^2 + d^2}{2} - a^2 + 2ax - x^2.$$

Es iſt alſo $\frac{x^2 + d^2}{2} - a^2 + 2ax - x^2 = b$,

oder II. $-x^2 + 4ax - 2a^2 + d^2 = 2b$.

Subtrahirt man (I.) von (II.), ſo bleibt

$$-4x^2 + 12ax - 6a^2 = 2b,$$

$$\text{oder } x^2 - 3ax = -\frac{b + 3a^2}{2},$$

$$\text{alſo } x^2 - 3ax + \frac{9a^2}{4} = -\frac{b + 3a^2}{2} + \frac{9a^2}{4} = \frac{3a^2 - 2b}{4},$$

$$\text{folgl. } x = \frac{3a - \sqrt{(3a^2 - 2b)}}{2},$$

und hieraus ergiebt ſich das mittlere Glied

$$= \frac{-a + \sqrt{(3a^2 - 2b)}}{2},$$

$$\text{weil } \frac{3a - \sqrt{(3a^2 - 2b)}}{2} + \frac{-a + \sqrt{(3a^2 - 2b)}}{2} = a.$$

Setzt man nun, der Kürze wegen, das mittlere Glied $= g$, ſo iſt die Summe der beiden äußern Glieder $= a - g$, und da bei einer ſtetigen Proportion das Quadrat des mittlern Gliedes gleich iſt dem Producte der äußern Glieder, ſo iſt dieſes Product $= g^2$. Subſtituirt man daher die hier gefundenen Ausdrücke für die Summe und das Product der beiden äußern Glieder in den Seite 97 befindlichen Formeln, ſo erhält man die beiden äußern Glieder $\frac{a - g \pm \sqrt{[(a-g)^2 - 4g^2]}}{2} =$ $\frac{a - g \pm \sqrt{(a^2 - 2ag - 3g^2)}}{2}$, und $\frac{a - g \mp \sqrt{(a^2 - 2ag - 3g^2)}}{2}$.

70.

Wenn s die halbe Summe und d die halbe Differenz der beiden mittlern Glieder bezeichnet, ſo iſt $s - d$ das zweite und $s + d$ das dritte Glied in der geſuchten Progreſſion. Quadrirt man nun das zweite Glied $s - d$ und dividirt das Quadrat durch das dritte Glied $s + d$, ſo erhält man das erſte Glied

$$= \frac{(s - d)^2}{s + d}.$$

Quadrirt man ferner das dritte Glied $s + d$ und dividirt das Quadrat durch das zweite Glied $s - d$, ſo erhält man das vierte Glied

$$= \frac{(s + d)^2}{s - d}.$$

Die Progreſſion hat daher folgende Geſtalt:

$$\frac{(s - d)^2}{s + d} : s - d = s + d : \frac{(s + d)^2}{s - d}.$$

Nun bringe man die vier Glieder auf einerlei Benennung und addire ſie, ſo iſt die Summe

$$= \frac{4s^3 + 4sd^2}{s^2 - d^2} = \frac{4s\,(s^2 + d^2)}{s^2 - d^2} = a.$$

Hieraus ergiebt ſich nun

$$\text{I. } d = s\sqrt{\frac{a - 4s}{a + 4s}}.$$

Ferner quadrire man die einzelnen Glieder, und bringe ſie unter einerlei Nenner, ſo iſt die Summe des erſten und vierten Gliedes

$$= \frac{(s - d)^6 + (s + d)^6}{(s^2 - d^2)^2}$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{l} s^6 - 6s^5d + 15s^4d^2 - 20s^3d^3 + 15s^2d^4 - 6sd^5 + d^6 \\ + s^6 + 6s^5d + 15s^4d^2 + 20s^3d^3 + 15s^2d^4 + 6sd^5 + d^6 \end{array}\right\}}{(s^2 - d^2)^2}$$

$$= \frac{2s^6 + 30s^4d^2 + 30s^2d^4 + 2d^6}{(s^2 - d^2)^2}.$$

Die Summe des zweiten und dritten Gliedes iſt

$$= \frac{[(s - d^2 + (s + d)^2] (s^2 - d^2)^2}{(s^2 - d^2)^2}$$

$$= \frac{(2s^2 + 2d^2) \cdot (s^4 - 2s^2d^2 + d^4)}{(s^2 - d^2)^2}$$

$$= \frac{2s^6 - 2s^4d^2 - 2s^2d^4 + 2d^6}{(s^2 - d^2)^2}.$$

Addirt man die Summe der Quadrate, ſo erhält man

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} 2s^6 + 30s^4d^2 + 30s^2d^4 + 2d^6 \\ + 2s^6 - 2s^4d^2 - 2s^2d^4 + 2d^6 \end{array}\right\}}{(s^2 - d^2)^2}$$

$$= \frac{4s^6 + 28s^4d^2 + 28s^2d^4 + 4d^6}{(s^2 - d^2)^2}.$$

Es iſt demnach

$$\text{II.} \quad \frac{4s^6 + 28s^4d^2 + 28s^2d^4 + 4d^6}{(s^2 - d^2)^2} = b.$$

Subſtituirt man nun den in (I.) gefundenen Werth von d in die Gleichung (II.) und entwickelt s, ſo erhält man

$$s = \frac{- b \pm \sqrt{[b^2 + 2a^2 (a^2 - b)]}}{4a}.$$

Man braucht daher nur die für d und s gefundenen Werthe in die Progreſſion

$$\frac{(s - d)^2}{s + d} : s - d = s + d : \frac{(s + d)^2}{s - d}$$

gehörig zu ſubſtituiren, um die verlangte Progreſſion zu erhalten.

71.

Setzt man auch hier die halbe Summe der beiden mittlern Glieder = s und die halbe Differenz derſelben = d, ſo iſt aus demſelben Grunde, wie in der vorigen Auflöſung, die Form der geſuchten Progreſſion folgende:

$$\frac{(s-d)^2}{s+d} : s-d = s+d : \frac{(s+d)^2}{s-d}.$$

Man bringe die beiden äußern Glieder unter einerlei Nenner und addire ſie. Die Summe hiervon iſt

$$\frac{(s-d)^3+(s+d)^3}{s^2-d^2} = \frac{\left\{\begin{matrix} s^3-3s^2d+3sd^2-d^3 \\ +s^3+3s^2d+3sd^2+d^3 \end{matrix}\right\}}{s^2-d^2}$$

$$= \frac{2s^3+6sd^2}{s^2-d^2}.$$

Ebenſo bringe man die beiden mittleren Glieder unter gleichen Nenner und addire ſie. Die Summe hiervon beträgt

$$\frac{(s^2-d^2)(s-d)+(s^2-d^2)(s+d)}{s^2-d^2} = \frac{\left\{\begin{matrix} s^3-sd^2-s^2d+d^3 \\ +s^3-sd^2+s^2d-d^3 \end{matrix}\right\}}{s^2-d^2}$$

$$= \frac{2s^3-2sd^2}{s^2-d^2}.$$

Subtrahirt man nun die Summe der mittlern Glieder von der Summe der äußern, ſo erhält man

$$\frac{2s^3+6sd^2-(2s^3-2sd^2)}{s^2-d^2} = \frac{8sd^2}{s^2-d^2}.$$

Es iſt demnach I. $\frac{8sd^2}{s^2-d^2} = a.$

Ferner nehme man die Summe der Quadrate der beiden äußern Glieder

$$\frac{2s^6+30s^4d^2+30s^2d^4+2d^6}{(s^2-d^2)^2}$$

und ziehe die Summe der Quadrate der beiden mittlern Glieder

$$\frac{2s^6 - 2s^4d^2 - 2s^2d^4 + 2d^6}{(s^2 - d^2)^2}$$

davon ab, ſo erhält man

$$\text{II. } \frac{32s^4d^2 + 32s^2d^4}{(s^2 - d^2)^2} = b.$$

Erhebt man nun (I.) zum Quadrat, und zieht dieſe Gleichung von (II.) ab, ſo bleibt

$$\frac{32s^4d^2 - 32s^2d^4}{(s^2 - d^2)^2} = b - a^2,$$

oder $$\frac{32s^2d^2\,(s^2 - d^2)}{(s^2 - d^2)(s^2 - d^2)} = \frac{32s^2d^2}{s^2 - d^2} = b - a^2.$$

Nun iſt nach der Gleichung (I.)

$$\frac{32s^2d^2}{s^2 - d^2} = 4as.$$

Es iſt demnach $4as = b - a^2$,

folgl. $s = \dfrac{b - a^2}{4a}$.

Subſtituirt man dieſen gefundenen Werth von s in die Gleichung

$$\frac{32s^2d^2}{s^2 - d^2} = b - a^2,$$

ſo erhält man

$$\frac{32\,(b - a^2)^2d^2}{(b - a^2)^2 - 16a^2d^2} = b - a^2,$$

oder $$\frac{32\,(b - a^2)d^2}{(b - a^2)^2 - 16a^2d^2} = 1,$$

$$[32\,(b - a^2) + 16a^2]\,d^2 = (b - a^2)^2,$$

$$\text{folgl. } d^2 = \frac{(b - a^2)^2}{32b - 16a^2} = \frac{(b - a^2)^2}{16 \cdot 2b - 16a^2},$$

$$\text{und } d = \frac{b - a^2}{4\sqrt{(2b - a^2)}}.$$

72.

Auch hier iſt, wie in den vorhergehenden Auflöſungen, die Form der geſuchten Progreſſion

$$\frac{(s - d)^2}{s + d} : s - d = s + d : \frac{(s + d)^2}{s - d}.$$

Man bringe erſtlich die vier Glieder auf einerlei Benennung:

$$\frac{(s - d)^3}{s^2 - d^2} : \frac{(s - d)^2\,(s + d)}{s^2 - d^2}$$

$$= \frac{(s + d)^2\,(s - d)}{s^2 - d^2} : \frac{(s + d)^3}{s^2 - d^2}.$$

Die Summe des erſten und dritten Gliedes iſt demnach

$$= \frac{2s^3 - 2s^2d + 2sd^2 - 2d^3}{s^2 - d^2},$$

und die Summe des zweiten und vierten Gliedes

$$= \frac{2s^3 + 2s^2d + 2sd^2 + 2d^3}{s^2 - d^2}.$$

Subtrahirt man nun die erſte Summe von der zweiten, ſo bleibt

$$\frac{4s^2d + 4d^3}{s^2 - d^2}.$$

Man erhält daher die Gleichung

$$\frac{4s^2d + 4d^3}{s^2 - d^2} = a,$$

$$\text{folgl } s = d\sqrt{\frac{a + 4d}{a - 4d}} \text{ u. ſ. w.}$$

73.

Dieſe Auflöſung, ſowie die Auflöſungen der übrigen Aufgaben bis zu Ende dieſes Kapitels ſind zur Erſparung des Raumes weggeblieben, da der Herr Verfaſſer der Beiſpielſammlung ſolche zum Theil ſelbſt aufgelöſt, oder doch die nöthigen Winke dazu gegeben hat.

IX.

Auflöſungen der Aufgaben für die Gleichungen von höheren Graden.

(Zu M. Hirſch, Sammlung von Beiſpielen, XVIII. Kapitel, von S. 244 bis 254)

1.

Iſt die Zahl x, ſo hat man die Gleichung

$$\frac{x}{3}\cdot x^2 = \frac{x^3}{3} = 1944.$$

Es iſt alſo $x = \sqrt[3]{(3\cdot 1944)} = \sqrt[3]{5832} = 18$.

2.

Die Zahl ſei x. Es iſt alſo

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+32 = 4640,$$

$$\text{oder } \frac{x^3}{24}+32 = 4640,$$

alſo $x^3 = 110592$, und daher $x = 48$.

3.

Wenn die Zahl = x angenommen wird, ſo iſt

$$x^4 : \frac{x}{8} - 167 = 12000,$$

oder $8x^3 = 12167$, folgl. $x = \sqrt[3]{\frac{12167}{8}} = 11\frac{1}{2}$.

4.

Die Anzahl der Schachteln ſei x, folglich ſind in jeder Schachtel 3x Citronen enthalten, und alſo befinden ſich in den x Schachteln $x \cdot 3x = 3x^2$ Citronen. Da nun für jede Citrone 2x Pfennige bezahlt worden, ſo koſten ſämmtliche Citronen $2x \cdot 3x^2 = 6x^3$ Pfennige.

Es iſt alſo $6x^3 = 16464$,

folgl. $x = \sqrt[3]{2744} = 14$ Schachteln,

mithin waren in jeder Schachtel $3 \cdot 14 = 42$ Citronen. Es waren daher überhaupt $14 \cdot 42 = 588$ Citronen.

5.

Es mögen x Kaufleute geweſen ſein. Es gab alſo ein jeder die Summe von 1000x Thlrn. Das geſammte Geld beträgt daher $x \cdot 1000x = 1000x^2$ Thlr. Mit dieſem Gelde iſt, nach der Aufgabe, $\frac{x}{2}$ Procent gewonnen worden. Man findet alſo die Intereſſen von dem Kapitale $1000x^2$, wenn man ſetzt

$$100 : \frac{x}{2} = 1000x^2 : \frac{1000x^2 \cdot \frac{x}{2}}{100}.$$

Es iſt daher $\frac{1000x^2 \cdot \frac{x}{2}}{100} = 5x^3 = 2560$,

folgl. x = 8 Kaufleute.

6.

Das Kapital habe jährlich x Procent Zinſen gebracht. Die Intereſſen vom erſten Jahre haben alſo $\frac{10000x}{100} = 100x$ betragen. Das Kapital war daher nach Verlauf des erſten Jahres gleich $10000 + 100x$. Die Intereſſen vom zweiten Jahre findet man, wenn man ſetzt $100 : x = 10000 + 100x : \frac{x(10000 + 100x)}{100}$. Es ſind alſo die Intereſſen des zweiten Jahres $100x + x^2$. Das nunmehrige Kapital am Ende des zweiten Jahres iſt demnach $10000 + 100x + 100x + x^2 = 10000 + 200x + x^2$. Man ſetze ferner $100 : x = 10000 + 200x + x^2 : \frac{x(10000 + 200x + x^2)}{100}$. Es ſind daher $100x + 2x^2 + \frac{x^3}{100}$ die Intereſſen des dritten Jahres. Addirt man nun die Intereſſen von den drei Jahren zuſammen, ſo erhält man

$$\frac{x^3}{100} + 3x^2 + 300x.$$

Es iſt alſo $\frac{x^3}{100} + 3x^2 + 300x = 1576\frac{1}{4} = \frac{6305}{4}$,

oder $x^3 + 300x^2 + 30000x - 157625 = 0$.

Die Gleichung hat nur eine mögliche Wurzel 5,

folgl. iſt $x = 5$.

7.

Wenn die drei Zahlen x, y und z ſind, ſo iſt

I. $x^2y = 112$,

II. $y^2z = 588$,

III. $z^2x = 576$.

Multiplicirt man dieſe Gleichungen mit einander, ſo erhält man

$$x^3y^3z^3 = 112 \cdot 588 \cdot 576 = 37933056,$$

und hieraus IV. $xyz = \sqrt[3]{37933056} = 336.$

Dividirt man dieſe Gleichung durch (I.), ſo iſt

$$\frac{xyz}{x^2y} = \frac{336}{112} \text{ oder } \frac{z}{x} = 3,$$

folgl. V. $z = 3x.$

Subſtituirt man dieſen Werth von z in (III.), ſo iſt

$$9x^3 = 576 \text{ oder } x^3 = 64 \text{ und daher } x = 4.$$

Den Werth von x in (V.) ſubſtituirt, giebt $z = 12$, und durch die beiden Werthe von x und z erhält man aus (IV.) $y = 7$.

8.

Die drei Zahlen ſeien abermals x, y und z, ſo iſt

I. $x^2y = a,$

II. $y^2z = b,$

III. $z^2x = c.$

Multiplicirt man dieſe Gleichungen mit einander, ſo erhält man

$$x^3y^3z^3 = abc,$$

und hieraus IV. $xyz = \sqrt[3]{abc}.$

Dividirt man dieſe Gleichung durch (I.), ſo iſt

$$\frac{xyz}{x^2y} = \frac{\sqrt[3]{abc}}{a},$$

oder $\frac{z}{x} = \frac{\sqrt[3]{abc}}{a},$

folgl. V. $z = x\,\frac{\sqrt[3]{abc}}{a}.$

Subſtituirt man dieſen Werth von z in (III.), ſo iſt

$$\left(\frac{x\sqrt[3]{abc}}{a}\right)^2 x = c,$$

oder $$\frac{x^3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{a^2} = c,$$

$$x^3 = \frac{a^2c}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} = \sqrt[3]{\frac{a^6c^3}{a^2b^2c^2}} = \sqrt[3]{\frac{a^4c}{b^2}},$$

folgl. $$x = \sqrt[9]{\frac{a^4c}{b^2}}.$$

Den Werth von x in (V.) ſubſtituirt, giebt

$$z = \sqrt[9]{\frac{a^4c}{b^2}}\sqrt[3]{\frac{abc}{a^3}} = \sqrt[9]{\frac{a^4c}{b^2}}\sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}} = \sqrt[9]{\frac{a^4cb^3c^3}{b^2a^6}}$$

$$= \sqrt[9]{\frac{c^4b}{a^2}},$$

und durch die beiden Werthe von x und z erhält man aus (IV.)

$$y\sqrt[9]{\frac{a^4c}{b^2}}\sqrt[9]{\frac{c^4b}{a^2}} = \sqrt[3]{abc},$$

folgl. $$y = \frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[9]{\frac{a^4c^5b}{a^2b^2}}} = \sqrt[9]{\frac{a^3b^3c^3}{\frac{a^4c^5b}{a^2b^2}}}$$

$$= \sqrt[9]{\frac{a^5b^5c^3}{a^4c^5b}} = \sqrt[9]{\frac{ab^4}{c^2}}.$$

9.

Die Auflöſung dieſer Aufgabe iſt der vorhergehenden ähnlich.

10.

Es mögen jedesmal x Quart abgezapft worden ſein. Nachdem alſo das Faß zum erſten Mal abgezapft und wieder mit Waſſer angefüllt worden, iſt in ſelbigem $81 - x$ Quart reiner Wein überhaupt, und folglich in jedem Quart beſonders $\frac{81 - x}{81}$ Quart geblieben. Die Güte des Weines nach der erſten Miſchung iſt alſo $\frac{81 - x}{81}$ mal pro Quart ſchlechter geworden. Da man nun von dieſem ſchlechter gewordenen Wein zum zweitenmal x Quart wegnimmt, und dafür ſo viel Waſſer hinzuthut, ſo verſchlechtert er ſich abermals in demſelben Verhältniß, wie vorher, nämlich $\frac{81 - x}{81}$ mal pro Quart; und da nun dieſe Miſchung auf eine gleiche Art viermal nach einander geſchieht, ſo verſchlechtert ſich der Wein $\left(\frac{81 - x}{81}\right)^4$ mal pro Quart. Nun iſt, nach der Aufgabe, bei der letzten Miſchung nur noch 16 Quart reiner Wein im Faſſe geblieben, es war alſo in jedem Quart nur noch $\frac{16}{81}$ Wein enthalten, mithin hatte ſich der Wein, $\frac{16}{81}$ mal verſchlechtert. Es iſt daher

$$\left(\frac{81 - x}{81}\right)^4 = \frac{16}{81}.$$

Zieht man aus beiden Theilen der Gleichung die vierte Wurzel aus, ſo iſt

$$\frac{81-x}{81} = \frac{2}{3},$$

folgl. $x = 27$.

11.

Wenn die eine Zahl x iſt, ſo iſt die andere $x + 4$. Ihre Summe iſt alſo $2x + 4$, ihr Product $x^2 + 4x$, und das Product aus dieſen beiden Ausdrücken $= (2x + 4)(x^2 + 4x) = 2x^3 + 12x^2 + 16x$.

Es iſt alſo $2x^3 + 12x^2 + 16x = 1386$,

oder $x^3 + 6x^2 + 8x - 693 = 0$.

Dieſe Gleichung hat nur eine mögliche Wurzel 7, folglich iſt $x = 7$, und daher die andere Zahl $= 11$.

12.

Das Gefäß habe x Mark gewogen. Da nun jede Mark ſo viel Loth Silber enthält, als das Gewicht des ganzen Gefäßes an Mark beträgt, ſo iſt in jeder Mark x Loth Silber, und im ganzen Gefäße x^2 Loth Silber enthalten. Ferner iſt, nach der Aufgabe, für das Loth reines Silber $x + 8$ Gr., alſo für das ganze Gefäß $(x + 8)\,x^2$ Gr. $= x^3 + 8x^2$ Gr. bezahlt worden. Es iſt alſo

$$x^3 + 8x^2 = 120 \cdot 24 \text{ Gr.} = 2880 \text{ Gr.},$$

oder $x^3 + 8x^2 - 2880 = 0$.

Dieſe Gleichung hat nur eine mögliche Wurzel 12, folglich iſt $x = 12$ Mark.

13.

Es mögen x Officiere ſein. Da nun jeder Officier $3x$ Cavalleriſten und $7x$ Infanteriſten hat, ſo haben die x Officiere $3x^2$ Cavalleriſten und $7x^2$ Infanteriſten; und da ferner jeder Cavalleriſt $x + 2$ Patronen, jeder Infanteriſt aber $x + 22$ Patronen hat, ſo haben die Cavalleriſten $3x^2 (x+2) = 3x^3 + 6x^2$ und die Infanteriſten $7x^2 (x + 22) = 7x^3 + 154x^2$. Die ſämmtlichen Patronen ſind daher $= 3x^3 + 6x^2 + 7x^3 + 154x^2$.

Es iſt alſo $3x^3 + 6x^2 + 7x^3 + 154x^2$

$$= 10x^3 + 160x^2 = 15360,$$

oder $x^3 + 16x^2 - 1536 = 0$.

Dieſe Gleichung hat nur eine rationale Wurzel 8, folgl. iſt $x = 8$ Officiere.

14.

Die Ausgabe von vorgeſtern ſei x Thlr., ſo hat er geſtern $2x$ Thlr. und heute $x + 4$ Thlr. ausgegeben. Multiplicirt man dieſe drei Ausgaben mit einander und addirt 756 hinzu, ſo erhält man $x \cdot 2x (x+4) + 756 = 2x^3 + 8x^2 + 756$, und dieſes iſt, nach der Aufgabe, $= 134 (x + 4)$.

Es iſt daher $2x^3 + 8x^2 + 756 = 134 (x + 4)$

$$= 134x + 536,$$

oder $x^3 + 4x^2 - 67x + 110 = 0$.

Dieſe Gleichung hat nur zwei poſitive Wurzeln, nämlich 2 und 5, folglich iſt $x = 2$ oder 5, und alſo die heutige Ausgabe $= 6$ oder 9 Thlr.

15.

Die Anzahl der Kaufleute ſei x. Da nun jeder 10x Thlr. beigetragen hat, ſo iſt die ganze zuſammengelegte Summe $x \cdot 10x = 10x^2$ Thlr. Nun ſind die mit dieſem Kapitale gewonnenen Procente $= x + 8$. Man ſetze daher $100 : x + 8 = 10x^2 : \frac{10x^2(x+8)}{100}$.

$$\text{Es iſt alſo } \frac{10x^2\ (x+8)}{100} = \frac{x^2\ (x+8)}{10} = 288,$$

$$\text{oder } x^3 + 8x^2 - 2880 = 0,$$

folgl. $x = 12$ Kaufleute.

16.

Wenn die Anzahl der Kaufleute $= x$ iſt, ſo hat jeder von denſelben 40x Thlr. und folglich haben alle zuſammen $40x^2$ Thlr. zu den bereits vorhandenen 8240 Thlrn. zugelegt. Nun gewinnen ſie mit dem Kapitale $40x^2 + 8240$ x Procent. Man ſetze alſo $100 : x = 40x^2 + 8240 : \frac{(40x^2+8240)x}{100}$. Der Gewinn iſt daher $= \frac{(40x^2 + 8240)\,x}{100}$. Hiervon bekommt jeder 10x und es bleiben noch 224 Thlr. übrig.

$$\text{Es iſt alſo } \frac{(40x^2 + 8240)\,x}{100} = 10x^2 + 224,$$

$$\text{oder } 40x^3 - 1000x^2 + 8240x - 22400 = 0,$$

$$\text{oder } x^3 - 25x^2 + 206x - 560 = 0.$$

Dieſe Gleichung hat drei rationale Wurzeln, nämlich 7, 8 und 10, folglich iſt $x = 7$ oder 8 oder 10.

17.

Wenn A x Thlr. bei ſich hat, ſo hat B $x + 1$, C $x + 2$ und D $x + 3$ Thlr. bei ſich. Das Product dieſer vier Summen beträgt $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$. Der Cubus von $x + 3$ iſt $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$.

Es iſt daher $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$

$$= x^3 + 9x^2 + 27x + 27 + 1168,$$

oder $x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 21x - 1195 = 0$.

Dieſe Gleichung hat nur eine rationale Wurzel 5, folglich iſt $x = 5$ u. ſ. w.

18.

Das Tagelohn jedes einzelnen Arbeiters ſei x Gr. Es ſind alſo überhaupt 3x Arbeiter geweſen, und das Tagelohn ſämmtlicher Arbeiter hat $3x^2$ Groſchen betragen. Da nun ferner in allem $3x^2 - 100$ Tage gearbeitet worden iſt, ſo beträgt das geſammte Lohn $3x^2 (3x^2 - 100) = 9x^4 - 300x^2$.

Es iſt alſo $9x^4 - 302x^2 = 2500$ Thlr. $= 60000$ Gr.,

$$\text{oder } x^4 - \frac{100x^2}{3} - \frac{20000}{3} = 0.$$

Schafft man die Brüche aus dieſer Gleichung weg und verfährt, wie oben Abſchn. V. B. §. 8. S. 135 gelehrt worden, ſo findet man

$x = 10$ Gr. Tagelohn jedes einzelnen Arbeiters,
alſo die Anzahl der Arbeiter $= 30$,
und die der Tage $= 200$.

19.

Die größere Zahl ſei x, ſo iſt die kleinere $63 - x$. Dividirt man die größere durch die kleinere, multiplicirt mit der größern, und addirt $20\frac{1}{4}$, ſo erhält man $\frac{x}{63 - x} \cdot x + 20\frac{1}{4}$. Dieſer Ausdruck ſoll gleich ſein einer Cubikzahl, deren Wurzel $\frac{x}{7} - 1$ iſt. Da nun $\left(\frac{x}{7} - 1\right)^3$ eine ſolche Zahl iſt, ſo iſt

$$\frac{x^2}{63 - x} + 20\tfrac{1}{4} = \left(\frac{x}{7} - 1\right)^3,$$

oder $\frac{x^2}{63 - x} + 20\frac{1}{4} = \frac{x^3 - 21x^2 + 147x - 343}{343}$,

oder $x^4 - 84x^3 + 1813x^2 - 16549\frac{3}{4}x + 459191\frac{1}{4} = 0$. Verfährt man mit dieſer Gleichung nach dem in der vorigen Aufgabe erwähnten §. 8, ſo findet man

$x = 35$ für die größere Zahl,

und alſo die kleinere Zahl $= 28$.

20.

Die Zeit, in welcher der Waſſerbehälter durch die erſte Röhre gefüllt wird, mag x Stunden betragen, ſo wird er durch die zweite Röhre in $x + 4$, durch die dritte in $x + 8$ und durch die vierte in $x + 12$ Stunden gefüllt. Da alſo die erſte Röhre in x Stunden das ganze Gefäß füllt, ſo füllt ſie in einer Stunde nur $\frac{1}{x}$ des Gefäßes, und aus demſelben Grunde füllt die zweite Röhre in einer Stunde $\frac{1}{x + 4}$, die dritte $\frac{1}{x+8}$, und die vierte $\frac{1}{x+12}$ des Gefäßes. Die vier Röhren füllen alſo zuſammen in einer Stunde $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+8} + \frac{1}{x+12}$ $= \frac{4x^3 + 72x^2 + 352x + 384}{x^4 + 24x^3 + 176x^2 + 384x}$ des Gefäßes. Nun wird, nach der Aufgabe, der ganze Behälter durch die vier Röhren zuſammen in einer Stunde $55\frac{1}{5}$ Minuten d. i. in $\frac{48}{25}$ Stunden gefüllt, folglich wird in einer Stunde $1 : \frac{48}{25} = \frac{25}{48}$ des Gefäßes gefüllt. Es iſt demnach

$$\frac{4x^3 + 72x^2 + 352x + 384}{x^4 + 24x^3 + 176x^2 + 384x} = \frac{25}{48},$$

oder $192x^3 + 3456x^2 + 16896x + 18432$

$= 25x^4 + 600x^3 + 4400x^2 + 9600x,$

oder $25x^4 + 408x^3 + 944x^2 - 7296x = 18432,$

alſo $x^4 + \frac{408x^3}{25} + \frac{944x^2}{25} - \frac{7296x}{25} - \frac{18432}{25} = 0.$

Verfährt man mit dieſer Gleichung nach S. 135 §. 8, ſo findet man

$x = 4$ Stunden.

21.

Bei dieſer Aufgabe ſowohl, als bei den nachfolgenden Aufgaben dieſer Klaſſe, und zwar bis zur 35ſten, hat der Herr Verfaſſer der Beiſpielſammlung bereits die nöthigen Winke zu deren Auflöſung ſelbſt angegeben. Die nähere Bearbeitung derſelben hat weiter keine Schwierigkeiten, am wenigſten für denjenigen, welcher die frühern Auflöſungen bis hierher mit dem erforderlichen Nachdenken durchgenommen hat. Die weitern Auflöſungen bleiben demnach hier weg, damit der Schüler Gelegenheit erhalte, die bereits erworbenen Kräfte zu üben.

X.

Auflöſungen der unbeſtimmten Aufgaben.

(Zu M. Hirſch, Sammlung von Beiſpielen ꝛc. XIX. Kapitel, von S. 255 bis S. 271.)

1.

Da die Zahl, durch 3 dividirt, 1 übrig läßt, ſo muß ſie die Form $3x + 1$ haben, und da ſie, durch 5 dividirt, 2 übrig läßt, ſo muß ſie zugleich die Form $5y + 2$ haben. Es iſt alſo $3x + 1 = 5y + 2$ und $x = \frac{5y+1}{3} = y + \frac{2y+1}{3}$. Da nun x ſowohl, als y ganze Zahlen ſein ſollen, ſo muß auch $\frac{2y+1}{3}$ eine ganze Zahl ſein d. h. $2y + 1$ muß durch 3 theilbar ſein. Man ſetze daher $2y + 1 = 3z$ oder $y = \frac{3z-1}{2} = z + \frac{z-1}{2}$. Da nun auch hier z eine ganze Zahl bedeutet, ſo muß auch $\frac{z-1}{2}$ eine ganze Zahl d. h. $z - 1$ muß durch 2 theilbar ſein. Es ſei daher $z - 1 = 2n$ oder $z = 2n + 1$, ſo iſt $y = \frac{6n+3-1}{2} = 3n + 1$. Subſtituirt man dieſen Werth von y in $5y + 2$, ſo erhält man für die Form der Zahlen, welche die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, $15n + 7$. Setzt man alſo für n nach und nach alle mögliche Zahlen, wie ſie von 0 an in der natürlichen Ordnung nach einander folgen, nämlich: 0, 1, 2, 3, 4 . . ., ſo erhält man eine arithmetiſche Progreſſion, die ſich mit 7 anfängt und 15 zur Differenz hat, und zwar: 7, 22, 37, 52, 67, 82..., wovon jedes einzelne Glied die in der Aufgabe verlangten Eigenſchaften beſitzt.

2.

Die Zahl muß ſowohl die Form $8x + 5$, als auch $11y + 4$ haben. Es iſt alſo $8x + 5 = 11y + 4$ und $x = \frac{11y - 1}{8} = y + \frac{3y - 1}{8}$. Man ſetze aus dem vorhergehenden Grunde $3y - 1 = 8z$, ſo iſt $y = \frac{8z + 1}{3} = 2z + \frac{2z + 1}{3}$. Ferner ſetze man $2z + 1 = 3u$, ſo iſt $z = \frac{3u - 1}{2} = u + \frac{u - 1}{2}$. Setzt man nun endlich $u - 1 = 2n$ oder $u = 2n + 1$, ſo iſt $z = \frac{6n + 3 - 1}{2} = 3n + 1$ und $y = \frac{24n + 8 + 1}{3}$ $= 8n + 3$. Dieſen Ausdruck in $11y + 4$ ſubſtituirt, giebt für die Form der geſuchten Zahlen $88n + 37$. Das iſt eine arithmetiſche Progreſſion, die ſich mit 37 anfängt und 88 zur Differenz hat. Nämlich

37, 125, 213 . . . . .

3.

Die Zahlen müſſen die Form $9x$, zugleich aber auch die Form $14y + 8$ haben. Es iſt daher $9x = 14y + 8$ und $x = \frac{14y + 8}{9} = y + \frac{5y + 8}{9}$. Man ſetze $5y + 8 = 9z$, ſo iſt $y = \frac{9z - 8}{5} = z + \frac{4z - 8}{5}$. Da nun $4z - 8$ durch 5 theilbar ſein muß, ſo muß auch das Viertel, nämlich $z - 2$, durch 5 theilbar ſein. Es ſei alſo $z - 2 = 5n$ oder $z = 5n + 2$. Hieraus folgt $y = 9n + 2$, und die allgemeine Form für die geſuchten Zahlen iſt alſo $126n + 36$, woraus man die Zahlen

36, 162, 288, 414, 540 . . . . . erhält.

4.

Die geſuchte Anzahl Eier muß die Form $15x + 4$ und zugleich $12y + 10$ haben. Es iſt alſo $15x + 4 = 12y + 10$ und $y = \frac{15x - 6}{12} = \frac{5x - 2}{4} = x + \frac{x - 2}{4}$. Man ſetze $x - 2 = 4n$, ſo iſt $x = 4n + 2$. Dieſen Werth in $15x + 4$ ſubſtituirt, giebt die Form $60n + 34$. Nimmt man nun $n = 1$, ſo erhält man 94, alſo weniger als 100. Für $n = 3$ erhält man 214, alſo mehr als 200. Man kann daher für n nur 2 ſetzen, wodurch man 154 erhält. Dieſe Aufgabe läßt nur einen Fall zu, und iſt daher als beſtimmt anzuſehen.

5.

Die geſuchte Anzahl Nüſſe muß die Form $13x + 9$ und $17y + 14$ haben. Es iſt daher $13x + 9 = 17y + 14$ und $x = \frac{17y + 5}{13} = y + \frac{4y + 5}{13}$. Man ſetze $4y + 5 = 13z$, ſo iſt $y = \frac{13z - 5}{4} = 3z + \frac{z - 5}{4}$. Es ſei ferner $z - 5 = 4n$ oder $z = 4n + 5$, ſo iſt $y = 13n + 15$. Dieſes in $17y + 14$ ſubſtituirt, giebt die Form $221n + 269$. Setzt man nun $n = 1$, ſo erhält man 490, alſo mehr als 400. Man kann daher für n nur 0 ſetzen, wodurch man 269 als die einzige mögliche Zahl erhält.

6.

Die geſuchten Zahlen müſſen zuvörderſt die Form $3x + 2$ und $7y + 3$ haben. Es iſt alſo $3x + 2 = 7y + 3$ und $x = \frac{7y + 1}{3} = 2y + \frac{y + 1}{3}$. Nun ſei $y + 1 = 3u$, ſo iſt $y = 3u - 1$. Dieſes in $7y + 3$ ſubſtituirt, giebt $21u - 4$. Da nun aber ferner die geſuchten Zahlen zugleich die Form $10z + 9$ haben müſſen, ſo muß $21u - 4 = 10z + 9$ ſein, woraus man erhält $z = \frac{21u - 13}{10} = 2u + \frac{u - 13}{10}$. Es ſei daher $u - 13 = 10n$, ſo iſt $u = 10n + 13$, welcher Werth, in $21u - 4$ ſubſtituirt, $210n + 269$ giebt. Für n laſſen ſich nun alle mögliche Zahlen, folglich auch

$n - 1$ ſetzen, in welchem Falle man $210n - 210 + 269 = 210n + 59$ erhält. Die Zahlen ſind alſo

$$59,\ 269,\ 479 \ldots\ldots$$

7.

Da die Zahlen, durch 6 und 12 dividirt, den Reſt 1 übrig laſſen, ſo muß ihre Form $12x + 1$ ſein. Zugleich müſſen ſie aber auch die Form $15y + 10$ haben. Es iſt daher $12x + 1 = 15y + 10$ oder $x = \frac{15y + 9}{12} = \frac{5y + 3}{4} = y + \frac{y + 3}{4}$. Setzt man $y + 3 = 4n$, ſo iſt $y = 4n - 3$. Es iſt alſo die Form der geſuchten Zahlen $60n - 35$, oder, wenn man, wie oben, $n + 1$ ſtatt n ſetzt, $60n + 25$. Die geſuchten Zahlen ſind alſo

$$25,\ 85,\ 145 \ldots\ldots$$

8.

Die geſuchten Zahlen müſſen die Formen $5x + 3$, $6y + 1$, $7z$ und $8p + 5$ haben. Es iſt alſo $5x + 3 = 6y + 1$ und $x = \frac{6y - 2}{5} = y + \frac{y - 2}{5}$. Setzt man $y - 2 = 5u$, ſo iſt $y = 5u + 2$. Dieſes in $6y + 1$ ſubſtituirt, giebt eine neue Form $30u + 13$. Es iſt daher $30u + 13 = 7z$ und $z = \frac{30u + 13}{7}$ $= 4u + \frac{2u + 13}{7}$. Nun ſei $2u + 13 = 7q$, ſo iſt $u = \frac{7q - 13}{2} = 3q + \frac{q - 13}{2}$. Setzt man $q - 13$

$= 2r$, ſo iſt $q = 2r + 13$, und $u = 7r + 39$. Dieſen Werth für u in $30u + 13$ ſubſtituirt, giebt wieder eine andere Form $210r + 1183$. Hieraus folgt die Gleichung $210r + 1183 = 8p + 5$, oder

$$p = \frac{210r + 1178}{8} = \frac{105r + 589}{4} = 26r + \frac{r + 589}{4}.$$

Nun ſei $r + 589 = 4n$, ſo iſt $r = 4n - 589$. Subſtituirt man dieſes in $210r + 1183$, ſo erhält man endlich $840n - 122507$. Um nun dieſe Form ſo einzurichten, daß ſie durch die kleinſten Zahlen angegeben werde, erwäge man, daß ſich für n jede mögliche Zahl ſetzen läßt; man dividire alſo 122507 durch 840, und ſetze n nebſt dem um 1 vermehrten ganzen Theil des Quotienten d. h. $n + 146$ für n, ſo erhält man $840 (n + 146) - 122507 = 840n + 122640 - 122507 = 840n + 133$. Die Zahlen ſind alſo

133, 973, 1813, 2653 . . . . .

9.

Da die geſuchten Zahlen bei der Diviſion mit 4, 6 und 9 den Reſt 3 laſſen ſollen, ſo muß ihre Form $36x + 3$, zugleich aber auch $15y + 12$ ſein. Es iſt alſo $36x + 3 = 15y + 12$ und $y = \frac{36x - 9}{15} = \frac{12x - 3}{5} = 2x + \frac{2x - 3}{5}$. Setzt man $2x - 3 = 5z$, ſo iſt $x = \frac{5z + 3}{2} = 2z + \frac{z + 3}{2}$. Iſt nun $z + 3 = 2n$, ſo iſt $z = 2n - 3$ und $x = 5n - 6$. Subſtituirt man dieſen Ausdruck in $36x + 3$, ſo erhält man für die Form der geſuchten Zahlen $180n - 213$, welche Form man ebenſo, wie vorher, in die einfachere verwandeln kann, wenn man $n + 2$ für n ſetzt, wodurch man $180\,(n + 2) - 213 = 180n + 360 - 213 = 180n + 147$ erhält. Die Zahlen ſind demnach

147, 327, 507 . . . . .

10.

Die geſuchte Anzahl der Mannſchaft ſoll durch 5, 6 und 7 theilbar ſein, ſie muß alſo die Form $210x$, zugleich aber auch die Formen $11y + 9$ und $13z - 8$ haben. Es iſt alſo $210x = 11y + 9$ und $y = \frac{210x - 9}{11} = 19x + \frac{x - 9}{11}$. Man ſetze $x - 9 = 11p$, ſo iſt $x = 11p + 9$, und dieſes in $210x$ ſubſtituirt, giebt $2310p + 1890$. Nun iſt ferner $2310p + 1890 = 13z - 8$. Folgl. $z = \frac{2310p + 1898}{13} = 177p + 146 + \frac{9p}{13}$. Man ſetze $9p = 13q$, ſo iſt $p = \frac{13q}{9} = q + \frac{4q}{9}$; ferner ſei $4q = 9n$, ſo iſt $q = \frac{9n}{4} = 2n + \frac{n}{4}$. Setzt man endlich $n = 4r$, ſo iſt $q = 9r$ und $p = 13r$. Dieſes in $2310p + 1890$ ſubſtituirt, giebt $30030r + 1890$. Da nun, nach der Vorausſetzung, das Regiment nicht 2000 Mann ſtark iſt, ſo kann man n nur $= 0$ ſetzen, und man erhält die geſuchte Anzahl $= 1890$.

11.

Die Anzahl der Mannſchaft läßt bei der Diviſion mit 2, 4, 8 und 10 den Reſt 1 übrig; die Form dieſer Zahl muß alſo ſein $40x + 1$. Sie läßt aber auch zugleich durch die Diviſion mit 6 und 12 den Reſt 5 übrig; die Form iſt alſo $12y + 5$. Es iſt demnach $40x + 1 = 12y + 5$ und $y = \frac{40x - 4}{12} = \frac{10x - 1}{3} = 3x + \frac{x - 1}{3}$. Setzt man $x - 1 = 3n$, ſo iſt $x = 3n + 1$, und dieſes ſubſtituirt in $40x + 1$, giebt $120n + 41$. Da nun die Compagnie zwiſchen 100 und 200 Mann ſtark iſt, ſo kann man für n nur 1 ſetzen. Man erhält demnach $120 + 41 = 161$ Mann.

12.

Die Zahl der zuerſt gewonnenen Dukaten muß die Formen $3x + 2$ und $5y + 1$ haben. Es iſt alſo $3x + 2 = 5y + 1$ und $x = \frac{5y - 1}{3} = y + \frac{2y - 1}{3}$. Man ſetze $2y - 1 = 3p$, ſo iſt $y = \frac{3p + 1}{2} = p + \frac{p + 1}{2}$. Iſt nun ferner $p + 1 = 2q$, ſo iſt $p = 2q - 1$ und $y = 3q - 1$. Subſtituirt man dieſes in $5y + 1$, ſo erhält man $15q - 4$. Beim zweiten Spiele muß die Zahl der übrig gebliebenen Dukaten die Form $77z + 3$ haben. Addirt man zu dieſem Ausdruck die verlornen 6 Dukaten hinzu, ſo muß er dem vorigen, für die zuerſt gewonnenen Dukaten gefundenen Ausdrucke gleich ſein. Oder $15q - 4 = 77z + 9$ und $q = \frac{77z + 13}{15} = 5z + \frac{2z + 13}{15}$. Man ſetze $2z + 13 = 15r$, ſo iſt $z = \frac{15r - 13}{2} = 7r + \frac{r - 13}{2}$. Ferner ſei $r - 13 = 2n$, ſo iſt $r = 2n + 13$ und $z = 15n + 91$. Subſtituirt man dieſes in $77z + 9$, ſo erhält man $1155n + 7016$. Setzt man nun $n - 6$ für n, ſo giebt dieſes $1155\,(n - 6) + 7016 = 1155n - 6930 + 7016 = 1155n + 86$. Folglich iſt die Anzahl der gewonnenen Dukaten entweder 86 oder 1241 oder 2396 u. ſ. w.

13.

Die beiden Zahlen mögen x und y ſein, ſo iſt $17x = 26y + 7$ und $x = \frac{26y + 7}{17} = y + \frac{9y + 7}{17}$. Nun ſei $9y + 7 = 17z$, ſo iſt $y = \frac{17z - 7}{9} = z + \frac{8z - 7}{9}$. Man ſetze ferner $8z - 7 = 9u$, ſo iſt $z = \frac{9u + 7}{8} = u + \frac{u + 7}{8}$. Setzt man endlich $u + 7 = 8p$, ſo iſt $u = 8p - 7$, $z = 9p - 7$ und $y = 17p - 14$, oder, wenn man $p + 1$ für p ſetzt, $y = 17p + 3$. Hieraus erhält man $x = 26p + 5$. Die beiden Zahlen ſind alſo, je nachdem man für p nach und nach 0, 1, 2, 3 . . . . . ſetzt, 5 und 3, oder 31 und 20, oder 57 und 37 u. ſ. w.

14.

Es mögen von der erſten Art x und von der zweiten y Stück geweſen ſein, ſo iſt $16x = 25y + 1$ und $x = \frac{25y + 1}{16} = y + \frac{9y + 1}{16}$. Man ſetze $9y + 1 = 16z$, ſo iſt $y = \frac{16z - 1}{9} = z + \frac{7z - 1}{9}$. Ferner ſei $7z - 1 = 9p$, ſo iſt $z = \frac{9p + 1}{7} = p + \frac{2p + 1}{7}$. Nun ſei $2p + 1 = 7q$, ſo iſt $p = \frac{7q - 1}{2} = 3q + \frac{q - 1}{2}$. Iſt nun endlich $q - 1 = 2n$, ſo iſt $q = 2n + 1$, $p = 7n + 3$, $z = 9n + 4$ und $y = 16n + 7$. Hieraus erhält man auch $x = 25n + 11$. Die geſuchte Anzahl von Kanonenröhren iſt alſo 11 und 7 oder 36 und 23 u. ſ. w.

15.

Die Anzahl der Siebener ſei x und die der Siebzehner y, ſo iſt $7x = 17y + 120$ und $x = \frac{17y + 120}{7} = 2y + \frac{3y + 120}{7}$. Man ſetze $3y + 120$ oder $y + 40 = 7n$, ſo iſt $y = 7n - 40$ oder $= 7(n + 6) - 40 = 7n + 42 - 40 = 7n + 2$ und $x = 17n + 22$. Dieſes giebt 22 Siebener gegen 2 Siebzehner

39	„	„	9	„
56	„	„	16	„

u. ſ. w.

16.

Die drei Zahlen mögen x, y und z ſein, ſo iſt I. $7x + 1 = 9y$ und II. $7x = 11z + 2$. Beide Gleichungen von einander abgezogen, geben $9y - 11z - 2 = 1$ oder $9y = 11z + 3$ und $y = \frac{11z+3}{9} = z + \frac{2z+3}{9}$. Man ſetze $2z + 3 = 9p$, ſo iſt $z = \frac{9p-3}{2} = 4p + \frac{p-3}{2}$. Ferner ſei $p - 3 = 2r$, ſo iſt $p = 2r + 3$, $z = 9r + 3$ und $y = 11r + 4$. Subſtituirt man dieſen Werth von y in (I.), ſo erhält man $99r + 36 = 7x + 1$, und alſo $x = \frac{99r+35}{7} = \frac{99r}{7} + 5 = 14r + 5 + \frac{r}{7}$. Man ſetze $r = 7n$, ſo iſt $x = 99n + 5$, und ſubſtituirt man dieſen Werth in den für z und y gefundenen Ausdrücken, ſo erhält man $z = 63n + 3$ und $y = 77n + 4$. Die geſuchten Zahlen ſind alſo 5, 4, 3 oder 104, 81, 66 oder 203, 158, 129 u. ſ. w.

17.

Die Zahlen mögen x, y und z ſein, ſo iſt I. $19x = 10y + 7$ und II. $19x = 8z + 15$, folglich $8z + 15 = 10y + 7$ und $z = \frac{10y-8}{8} = \frac{5y-4}{4} = y - 1 + \frac{y}{4}$. Man ſetze III. $y = 4p$, ſo iſt IV. $z = 5p - 1$. Subſtituirt man ferner den in (III.) gefundenen Werth von y in (I.), ſo erhält man

$19x = 40p + 7$ und V. $x = \frac{40p + 7}{19} = 2p + \frac{2p + 7}{19}$. Man ſetze $2p + 7 = 19r$, ſo iſt $p = \frac{19r - 7}{2} = 9r + \frac{r - 7}{2}$. Ferner ſei $r - 7 = 2n$, ſo iſt $r = 2n + 7$ und $p = 19n + 63$. Subſtituirt man nun dieſen gefundenen Werth von p in die Gleichungen V. III. und IV., ſo erhält man

$x = 40n + 133 = 40\ (n - 3) + 133 = 40n + 13,$
$y = 76n + 252 = 76\ (n - 3) + 252 = 76n + 24,$
$z = 95n + 314 = 95\ (n - 3) + 314 = 95n + 29.$

Die geſuchten Zahlen ſind alſo: 13 Männer, 24 Weiber und 29 Kinder, oder 53 Männer, 100 Weiber und 124 Kinder ꝛc.

18.

Da der eine Theil durch 9 und der andere durch 14 theilbar ſein ſoll, ſo muß die Form des erſten Theils 9x und die des andern 14y ſein. Es iſt alſo $9x + 14y = 142$ und $x = \frac{142 - 14y}{9} = 15 - y + \frac{7 - 5y}{9}$. Man ſetze $7 - 5y$, oder (weil es hier nur darauf ankommt, daß der Unterſchied zwiſchen 7 und 5y durch 9 theilbar ſei, ohne darauf zu ſehen, ob dieſer Unterſchied poſitiv oder negativ iſt) $5y - 7 = 9z$, ſo iſt $y = \frac{9z + 7}{5} = z + 1 + \frac{4z + 2}{5}$. Man ſetze ferner $4z + 2$ oder $2z + 1 = 5p$, ſo iſt $z = \frac{5p - 1}{2}$

$= 2p + \frac{p-1}{2}$. Iſt nun endlich $p - 1 = 2n$, ſo iſt $p = 2n + 1$, $z = 5n + 2$, woraus ſich ergiebt $y = 9n + 5$. Nun erhellet aus der Gleichung $x = \frac{142 - 14y}{9}$, daß 14y kleiner, als 142, und folglich y nicht größer, als 10 ſein muß. Man darf alſo für n nichts anders, als 0 ſetzen, welches nur den einzigen Werth $y = 5$ giebt. Es iſt daher $14y = 70$ der eine Theil, und folglich 72 der andere Theil.

19.

Da der eine Theil durch 23 und der andere durch 34 theilbar ſein ſoll, ſo muß die Form des erſten Theils 23x und die des andern 34y ſein. Es iſt alſo $23x + 34y = 1591$ und $x = \frac{1591 - 34y}{23} = 69 - y + \frac{4 - 11y}{23}$. Man ſetze $11y - 4 = 23z$, ſo iſt $y = \frac{23z + 4}{11} = 2z + \frac{z + 4}{11}$. Iſt alſo $z + 4 = 11n$, ſo iſt $z = 11n - 4$ und $y = 23n - 8$ oder $23n + 15$. Nun erhellet aus der Gleichung $x = \frac{1591 - 34y}{23}$, daß 34y kleiner, als 1591, und alſo y nicht größer, als 46 ſein muß. Man kann daher für n nur entweder 0 oder 1 annehmen, und man erhält für den einen Theil entweder 510 und folglich für den andern 1081, oder für den einen 1292 und für den andern 299.

20.

Hier müſſen beide Theile die Form $37x + 3$ und

$54y + 6$ haben. Folglich $37x + 54y + 9 = 4890$ und alſo $x = \frac{4881 - 54y}{37} = 131 - y + \frac{34 - 17y}{37}$. Man ſetze $17y - 34 = 37z$, ſo iſt $y = \frac{37z + 34}{17} = 2z + 2 + \frac{3z}{17}$. Es ſei $3z = 17p$, ſo iſt $z = \frac{17p}{3} = 5p + \frac{2p}{3}$. Es ſei ferner $2p = 3q$, ſo iſt $p = \frac{3q}{2} = q + \frac{q}{2}$. Iſt nun $q = 2n$, ſo iſt $p = 3n$, $z = 17n$ und $y = 37n + 2$. Aus der Gleichung $x = \frac{4881 - 54y}{37}$ geht hervor, daß y nicht größer, als 90 ſein darf; man kann daher für n nur 0, 1, 2 ſetzen, wodurch man 114 und 4776, oder 2112 und 2778, oder 4110 und 780 erhält.

21.

Die Anzahl der Männer ſei x und die der Weiber y, ſo iſt $19x + 13y = 876$ Gr. und $y = \frac{876 - 19x}{13} = 67 - x + \frac{5 - 6x}{13}$. Man ſetze $6x - 5 = 13z$, ſo iſt $x = \frac{13z + 5}{6} = 2z + \frac{z + 5}{6}$. Iſt daher $z + 5 = 6n$, ſo iſt $z = 6n - 5$ und $x = 13n - 10$ oder $13n + 3$. Nun ergiebt ſich aus der Gleichung $y = \frac{876 - 19x}{13}$, daß x nicht größer, als 46 ſein darf; es kann daher für n nur 0, 1, 2, 3 geſetzt werden. Es ſind daher 3 Männer und folglich 63 Weiber, oder 16 Männer und 44 Weiber, oder 29 Männer und 25 Weiber, oder 42 Männer und 6 Weiber.

22.

Die Anzahl der Pferde ſei x und die der Ochſen y, ſo iſt $31x + 21y = 1770$ und $y = \frac{1770 - 31x}{21} = 84 - x + \frac{6 - 10x}{21}$. Man ſetze $10x - 6$ oder $5x - 3 = 21z$, ſo iſt $x = \frac{21z + 3}{5} = 4z + \frac{z + 3}{5}$. Iſt nun $z + 3 = 5n$, ſo iſt $z = 5n - 3$ und $x = 21n - 12$ oder $21n + 9$. Da nun aus der Gleichung $y = \frac{1770 - 31x}{21}$ erhellet, daß x nicht größer, als 57 ſein darf, ſo kann man auch für n nur 0, 1, 2 ſetzen. Es ſind alſo 9 Pferde und 71 Ochſen, oder 30 Pferde und 40 Ochſen, oder 51 Pferde und 9 Ochſen.

23.

Die Anzahl der Schweine ſei x, die der Ziegen y und die der Schafe z, ſo iſt

I. $4\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{6}y + 1\frac{1}{4}z = 400$,
und II. $x + y + z = 124$.

Multiplicirt man die Gleichung (II.) mit $4\frac{1}{2}$ und zieht hiervon die Gleichung (I.) ab, ſo erhält man $\frac{8y}{6} + \frac{13z}{4} = 158$ oder $16y + 39z = 1896$ und $y = \frac{1896 - 39z}{16} = 118 - 2z + \frac{8 - 7z}{16}$. Man ſetze $7z - 8 = 16p$, ſo iſt $z = \frac{16p + 8}{7} = 2p + 1 + \frac{2p + 1}{7}$. Es ſei ferner $2p + 1 = 7q$, ſo iſt $p = \frac{7q - 1}{2}$

$= 3q + \frac{q-1}{2}$. Iſt endlich $q - 1 = 2n$, ſo iſt $q = 2n + 1$, $p = 7n + 3$, $z = 16n + 8$, $y = 99 - 39n$ und $x = 23n + 17$. Aus der vorletzten Gleichung folgt, daß, wenn y poſitiv ſein ſoll, n nicht größer, als 2 angenommen werden darf. Man kann daher für n nur ſetzen 0, 1, 2, und dieſes giebt 8 Schafe, 99 Ziegen und 17 Schweine; oder 24 Schafe, 60 Ziegen und 40 Schweine; oder 40 Schafe, 21 Ziegen und 63 Schweine.

24.

Die Theile mögen x, y und z ſein, ſo iſt

$$\text{I. } 7x + 19y + 38z = 745,$$

$$\text{und II. } x + y + z = 30.$$

Multiplicirt man die Gleichung (II.) mit 7 und zieht ſie von der Gleichung (I.) ab, ſo bleibt $12y + 31z = 535$ und $y = \frac{535 - 31z}{12} = 44 - 2z + \frac{7 - 7z}{12}$. Man ſetze $7z - 7$ oder $z - 1 = 12n$, ſo iſt $z = 12n + 1$, $y = 42 - 31n$, $x = 19n - 13$. Nun ergiebt ſich aus $y = 42 - 31n$, daß n nicht größer, als 1, und aus $x = 19n - 13$, daß n nicht kleiner, als 1 angenommen werden darf; man kann alſo für n nichts anders, als 1 ſetzen, und dieſes giebt die Theile $x = 6$, $y = 11$ und $z = 13$.

25.

Wenn die Theile x, y und z ſind, ſo iſt

$$\text{I. } 17x + 11y + 3z = 880,$$

$$\text{und II. } x + y + z = 100.$$

Multiplicirt man die Gleichung (II.) mit 3 und zieht ſie von (I.) ab, ſo bleibt $14x + 8y = 580$ und $y = \frac{290 - 7x}{4} = 72 - x + \frac{2 - 3x}{4}$. Man ſetze $3x - 2 = 4p$, ſo iſt $x = \frac{4p + 2}{3} = p + \frac{p + 2}{3}$. Iſt nun $p + 2 = 3n$, ſo iſt $p = 3n - 2$, $x = 4n - 2$, $y = 76 - 7n$ und $z = 3n + 26$. Nun ergiebt ſich aus $x = 4n - 2$, daß n nicht 0, und aus $y = 76 - 7n$, daß n nicht größer, als 10 ſein darf, die geſuchten Theile können daher auf 10 verſchiedene Arten beſtimmt werden, nämlich 2, 69, 29; 6, 62, 32; 10, 55, 35 u. ſ. w.

26.

Wenn die Zahlen x, y und z ſind, ſo iſt

$$\text{I.}\quad 5x + 13y + 18z = 997,$$
$$\text{II.}\quad 11x + 20y + 37z = 1866.$$

Multiplicirt man die erſte Gleichung mit 11 und die zweite mit 5, und zieht (II.) von (I.) ab, ſo bleibt $43y + 13z = 1637$ und $z = \frac{1637 - 43y}{13} = 125 - 3y + \frac{12 - 4y}{13}$. Man ſetze $4y - 12$ oder $y - 3 = 13n$, ſo iſt $y = 13n + 3$, $z = 116 - 43n$ und $x = 121n - 226$. Aus $z = 116 - 43n$ ergiebt ſich, daß n nicht größer, als 2, und aus $x = 121n - 226$ ergiebt ſich, daß n nicht kleiner, als 2 angenommen werden darf; man kann daher für n nur 2 ſetzen, und die geſuchten Zahlen ſind alſo 16, 29, 30.

27.

Es mögen x Gänſe, y Hühner, z Enten und v Tauben geweſen ſein, ſo iſt

$$\text{I. } x + y + z + v = 76,$$

$$\text{und II. } 20x + 10\tfrac{1}{2}y + 7z + 4v = 707.$$

Multiplicirt man die Gleichung (I.) mit 4 und ſubtrahirt ſie von (II.), ſo bleibt $16x + 6\frac{1}{2}y + 3z = 403$ oder $32x + 13y + 6z = 806$ und $z = \frac{806 - 32x - 13y}{6}$ $= 134 - 5x - 2y + \frac{2 - 2x - y}{6}$. Man ſetze $2 - 2x - y = 6p$, ſo iſt $y = 2 - 2x - 6p$. Nun kann man für x und p jede beliebige ganze Zahl und für p ſogar eine negative Zahl annehmen; nur muß man es ſo einrichten, daß $32x + 13y$ kleiner, als 806 und $x + y + z$ kleiner, als 76 werde. Nimmt man daher z. E. $p = -8$ und $x = 2$, ſo iſt $y = 46$, $z = 24$, $v = 4$. Für $p = -8$ und $x = 10$ iſt $y = 30$, $z = 16$ und $v = 20$ u. ſ. w.

28.

Es mögen x Männer, y Weiber und z Kinder geweſen ſein, ſo iſt

$$\text{I. } 84x + 33y + 6z = 1392,$$

$$\text{und II. } x + y + z = 30.$$

Multiplicirt man die Gleichung (II.) mit 6 und zieht ſie von (I.) ab, ſo bleibt $78x + 27y = 1212$ und $y = \frac{1212 - 78x}{27} = 44 - 2x + \frac{24 - 24x}{27}$. Man ſetze $24x - 24 = 27p$, ſo iſt $x = \frac{27p + 24}{24} = 1 + p + \frac{3p}{24}$. Iſt nun $3p = 24n$, ſo iſt $p = 8n$, $x = 9n + 1$, $y = 42 - 26n$, $z = 17n - 13$. Nun ergiebt ſich aus $y = 42 - 26n$, daß n nicht größer, als 1, und aus $z = 17n - 13$, daß n nicht kleiner, als 1 angenommen werden darf. Man kann daher für n nur 1 ſetzen, und dieſes giebt 10 Männer, 16 Weiber und 4 Kinder.

29.

Sind die Zahlen x und y, ſo iſt $xy = x + y$ und $y = \frac{x}{x - 1}$. Hier kann man nun für x jeden beliebigen Werth annehmen, ſo wird ſich y daraus beſtimmen laſſen. Iſt z. E. $x = 2$, ſo iſt $y = 2$; iſt $x = 3$, ſo iſt $y = 1\frac{1}{2}$; iſt $x = 1\frac{2}{3}$, ſo iſt $y = 2\frac{1}{2}$ u. ſ. w.

30.

Die Zahlen ſeien x und y. Es iſt demnach

$$x + y : xy = m : n,$$

alſo $nx + ny = mxy$,

folgl. $y = \frac{nx}{mx - n}$.

31.

Sind die Zahlen x und y, ſo iſt $xy + x + y = 139$ und $y = \frac{139 - x}{x + 1} = -1 + \frac{140}{x + 1}$. Es muß alſo, wenn y eine ganze Zahl ſein ſoll, $x + 1$ in 140 aufgehen; man braucht alſo nur die Theiler von 140 zu ſuchen, um hiernach x und y zu beſtimmen. Nun ſind die Theiler 2, 4, 5, 7, 10 u. ſ. w. Iſt daher $x = 1$, ſo iſt $y = -1 + \frac{140}{1+1} = 69$,

für $x = 3$ iſt $y = -1 + \frac{140}{3+1} = 34$ u. ſ. w.

32.

Sind die Zahlen x und y, ſo iſt $xy = 2(x-y) + 100$ oder $y(x+2) = 100 + 2x$ und $y = \frac{100+2x}{x+2} = 2 + \frac{96}{x+2}$. Es muß daher $x + 2$ ein Theiler von 96 ſein. Man erhält alſo $y = 2 + \frac{96}{10+2} = 10$ für $x = 10$; $y = 2 + \frac{96}{14+2} = 8$ für $x = 14$; $y = 2 + \frac{96}{22+2} = 6$ für $x = 22$ u. ſ. w.

33.

Wenn man die Zähler der geſuchten Brüche x und y nennt, ſo iſt $\frac{x}{7} + \frac{y}{11} = \frac{230}{77}$ oder $\frac{11x + 7y}{77} = \frac{230}{77}$, folglich $11x + 7y = 230$ und $y = \frac{230-11x}{7} = 32 - x + \frac{6-4x}{7}$. Man ſetze $4x - 6$ oder $2x - 3 = 7z$, ſo iſt $x = \frac{7z+3}{2} = 3z + \frac{z+3}{2}$. Iſt nun $z + 3 = 2n$, ſo iſt $z = 2n - 3$, $x = 7n - 9$ und $y = 47 - 11n$. Aus $x = 7n - 9$ ergiebt ſich, daß n nicht kleiner, als 2, und aus $y = 47 - 11n$, daß n nicht größer, als 4 angenommen werden darf. Man kann daher für n nur ſetzen 2, 3 und 4, und dieſes giebt $\frac{5}{7}$ und $\frac{25}{11}$, oder $\frac{12}{7}$ und $\frac{14}{11}$, oder $\frac{19}{7}$ und $\frac{3}{11}$.

34.

Die beiden Zahlen mögen z und y ſein, ſo muß $z^2 + y^2$ und folglich auch $\frac{z^2 + y^2}{y^2} = \frac{z^2}{y^2} + 1$ ein Quadrat ſein. Setzt man nun $\frac{z}{y} = x$, ſo iſt $\frac{z^2}{y^2} = x^2$. Es iſt daher auch die Summe $x^2 + 1$ eine Quadratzahl. Da nun dieſer Ausdruck eine Quadratzahl ſein ſoll, ſo muß ſich die Wurzel hiervon in rationalen Zahlen angeben laſſen. Es ſei daher $\sqrt{(x^2 + 1)} = x + m$ oder $x^2 + 1 = x^2 + 2mx + m^2$, oder $2mx + m^2 = 1$ und $x = \frac{1 - m^2}{2m}$. Da man nun unter m eine jede mögliche Zahl und alſo auch Brüche verſtehen kann, ſo ſetze man $m = \frac{q}{p}$, folglich iſt

$$x = \frac{1 - \frac{q^2}{p^2}}{\frac{2q}{p}} = \frac{p^2 - q^2}{2pq}.$$

Es iſt alſo $x^2 + 1 =$

$$\frac{p^4 - 2p^2q^2 + q^4}{4p^2q^2} + 1 = \frac{(p^2 - q^2)^2}{(2pq)^2} + 1 = \frac{p^4 + 2p^2q^2 + q^4}{4p^2q^2}$$

$= \frac{(p^2 + q^2)^2}{(2pq)^2}$. Multiplicirt man nun die Gleichung $\frac{(p^2 - q^2)^2}{(2pq)^2} + 1 = \frac{(p^2 + q^2)^2}{(2pq)^2}$ durch den Nenner $(2pq)^2$, ſo erhält man $(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 =$

$(p^2 + q^2)^2$. Die geſuchten Zahlen müſſen alſo die Form $p^2 - q^2$ und $2pq$ haben, und die Zahlen ſelbſt müſſen entweder 3 und 4, oder 6 und 8, oder 5 und 12 u. ſ. w. ſein.

35.

Dieſe Aufgabe und die folgenden bis incl. Nr. 43 hat der Herr Verfaſſer der Beiſpielſammlung zum Theil bereits ſelbſt aufgelöſt, weshalb die ſpeciellen Auflöſungen hier weggeblieben ſind.

44.

Sind die drei geſuchten Zahlen x, y und z, ſo ſetze man I. $x + y + z = p^2$, $x + y = q^2$, $x + z = r^2$ und $y + z = s^2$. Es iſt einleuchtend, daß man x, y und z kennt, ſobald q, r und s bekannt ſind. Da man nun für q, r und s jede beliebige Zahl, die jedoch der Gleichung (I.) Genüge leiſtet, ſetzen kann, ſo ſei $q = p - 1$, $r = p - 2$, $s = p - 3$. Es iſt alſo $x + y = (p - 1)^2 = p^2 - 2p + 1$. Subtrahirt man dieſe Gleichung von (I.), ſo erhält man $z = 2p - 1$. Ferner iſt $x + z = (p - 2)^2 = p^2 - 4p + 4$. Subtrahirt man dieſes von (I.), ſo erhält man $y = 4p - 4$. Setzt man die beiden für y und z gefundenen Werthe in die Gleichung $y + z = s^2$, ſo giebt dieſes $6p - 5 = s^2$ und $p = \frac{s^2 + 5}{6}$, $z = \frac{s^2 + 2}{3}$, $y = \frac{2s^2 - 2}{3}$. Für s läßt ſich nun jede Zahl, welche für z und y einen rationalen und poſitiven Werth giebt, ſetzen. Nimmt man z. E. $s = 11$, ſo iſt $z = 41$, $y = 80$ und $x = 320$. Für $s = 8$ iſt $z = 22$, $y = 42$ und $x = 68\frac{1}{4}$ u. ſ. w.

45.

Es ſeien die beiden Zahlen x und y, ſo iſt $x - y = x^3 - y^3$. Dividirt man die ganze Gleichung durch $x - y$, ſo erhält man $1 = x^2 + xy + y^2$ oder $x^2 + xy = 1 - y^2$; folglich iſt $x = -\frac{1}{2}y \pm \sqrt{(1 - \frac{3}{4}y^2)}$. Soll daher x eine rationale Zahl ſein, ſo muß auch $\sqrt{(1 - \frac{3}{4}y^2)}$ rational ſein. Es iſt daher $\sqrt{(1 - \frac{3}{4}y^2)} = 1 - my$ oder $1 - \frac{3}{4}y^2 = (1 - my)^2$, und dieſes giebt $y = \frac{2m}{m^2 + \frac{3}{4}}$. Man kann für m unendlich viele Zahlen ſetzen, wodurch man immer einen Werth für y und folglich auch für x erhält. Für $m = \frac{1}{6}$ iſt $x = \frac{5}{7}$ und $y = \frac{3}{7}$; für $m = \frac{1}{4}$ iſt $x = \frac{8}{13}$ und $y = \frac{7}{13}$; für $m = \frac{1}{10}$ iſt $x = \frac{16}{19}$ und $y = \frac{5}{19}$ u. ſ. w.

46.

Es laſſen ſich alle mögliche Zahlen durch $2n$ und $2n + 1$ ausdrücken. Da nun die Quadrate hiervon $4n^2$ und $4n^2 + 4n + 1$ ſind, ſo laſſen alle mögliche Quadratzahlen durch die Diviſion mit 2 nur entweder 0 oder 1 übrig. Ferner laſſen ſich alle mögliche Zahlen durch $3n$, $3n + 1$ und $3n + 2$ ausdrücken; die Quadrate hiervon ſind $9n^2$, $9n^2 + 6n + 1$, und $9n^2 + 12n + 4$. Dividirt man dieſe Quadrate mit 3, ſo bleiben auch hier die Reſte 0 oder 1. Ebenſo laſſen ſich alle mögliche Zahlen durch $4n$, $4n + 1$, $4n + 2$ und $4n + 3$ ausdrücken. Die Quadrate hiervon ſind $16n^2$, $16n^2 + 8n + 1$, $16n^2 + 16n + 4$, $16n^2 + 24n + 9$. Dieſe Quadrate laſſen ebenfalls bei der Diviſion mit 4 die Reſte 0 oder 1. Drückt man aber die Zahlen durch $5n$, $5n + 1$, $5n + 2$, $5n + 3$ und $5n + 4$ aus, ſo ſind die Quadrate hiervon $25n^2$, $25n^2 + 10n + 1$, $25n^2 + 20n + 4$, $25n^2 + 30n + 9$ und $25n^2 + 40n + 16$. Dieſe Quadrate laſſen bei der Diviſion mit 5 die Reſte 0, 1, 4. Fährt man auf dieſe Art fort, und drückt ſämmtliche Zahlen durch $6n$, $6n + 1$, $6n + 2$, $6n + 3$, $6n + 4$, $6n + 5$, oder durch $7n$, $7n + 1$, $7n + 2$, $7n + 3$, $7n + 4$, $7n + 5$, $7n + 6$ u. ſ. w. aus, ſo ſieht man bald, daß die erſten beiden Glieder des Quadrats immer durch 6, 7 u. ſ. w. theilbar ſind, und daß es alſo nur darauf ankommt, daß man die Quadrate von den Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5, oder von den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 u. ſ. w. durch 6 oder 7 u. ſ. w. dividirt, wodurch man die Reſte 1, 3, 4 oder 1, 2, 4 u. ſ. w. erhält. Es bleiben alſo bei der Diviſion mit 6 die Reſte 0, 1, 3, 4; für 7 die Reſte 0, 1, 2, 4; für 8 die Reſte 0, 1, 4; für 9 die Reſte 0, 1, 4, 7; für 10 die Reſte 0, 1, 4, 5, 6 und 9 u. ſ. w.

47.

Es laſſen ſich ſämmtliche Zahlen durch $7n$, $7n + 1$, $7n + 2$, $7n + 3$, $7n + 4$, $7n + 5$ und $7n + 6$ ausdrücken. Hiervon ſind die Kubikzahlen $343n^3$, $343n^3 + 147n^2 + 21n + 1$, $343n^3 + 294n^2 + 84n + 8$ u. ſ. w. Hieraus ergiebt ſich nun, daß, wenn man die hier aufgeſtellten allgemeinen Zahlenausdrücke kubirt, die erſten drei Glieder dieſer Kubikzahlen immer durch 7 theilbar ſind, und daß es alſo nur auf das letzte Glied, nämlich auf den Kubus von 1, 2, 3, 4, 5 und 6 d. i. auf 1, 8, 27, 64, 125 und 216 ankommt. Dividirt man alſo in dieſe Zahlen mit 7, ſo erhält man 1 oder 6 zum Reſt. Alle Kubikzahlen laſſen daher bei der Diviſion mit 7 die Reſte 0, 1, 6. Ferner laſſen ſich alle Zahlen durch $8n$, $8n + 1$, $8n + 2$, $8n + 3$, $8n + 4$, $8n + 5$, $8n + 6$ und $8n + 7$ ausdrücken. Es kommt alſo hier nur darauf an, daß man die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7 kubirt und die Kuben 1, 8, 27, 64, 125, 216 und 343 durch 8 dividirt, wodurch man die Reſte 0, 1, 3, 5 und 7 erhält. Alle Kubikzahlen laſſen daher bei der Diviſion mit 8 die Reſte 0, 1, 3, 5, 7. Auf gleiche Art findet man bei der Diviſion mit 9 die Reſte 0, 1, 8.

48.

Dieſe Aufgabe und die folgenden bis zu Ende dieſes Kapitels ſind ebenfalls durch den Herrn Verfaſſer aufgelöſt.

XI.

Auflöſungen der Aufgaben, die Progreſſionen und die figurirten Zahlen betreffend.

(Zu M. Hirſch, Sammlung von Beiſpielen ꝛc. XX. Kapitel, von S. 272 bis 284.)

1.

In dieſer Aufgabe iſt das erſte Glied $a = 30$, die Differenz $d = 4\frac{1}{2}$ und die Anzahl der Glieder $n = 17$ einer arithmetiſchen Progreſſion gegeben, und das letzte Glied t nebſt der Summe s wird geſucht. Nun ſind in der gedachten Beiſpielſammlung S. 104 für die arithmetiſchen Progreſſionen die Formeln

$$t = a + (n-1)\,d$$

$$s = \tfrac{1}{2}n(a+t) = \tfrac{1}{2}n\,[2a + (n-1)\,d]$$

angegeben. Man braucht daher nur in dieſen Formeln die hier gegebenen Größen zu ſubſtituiren. Es iſt demnach

$$t = 30 + (17-1)\,4\tfrac{1}{2}$$

$= 102$ Thlr. das Lohn im 17ten Jahre,

und $s = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot (30 + 102)$

$= 1122$ Thlr. das geſammte Lohn.

2.

Hier iſt $a = 2$ Thlr., $d = 4\frac{1}{2}$ Gr. und $n = 16$ gegeben, woraus man findet

$t = 2$ Thlr. $+ (16 - 1)\ 4\frac{1}{2}$ Gr.
$= 4$ Thlr. $19\frac{1}{2}$ Gr. Ausgabe des 16ten Tages,
und $s = \frac{1}{2} \cdot 16\ (2$ Thlr. $+ 4$ Thlr. $19\frac{1}{2}$ Gr.)
$= 54$ Thlr. 12 Gr. geſammte Ausgabe.

3.

Hier iſt $a = 17$ Gr., $d = \frac{1}{6}$ Gr. und $n = 30$. Es iſt demnach

$t = 17$ Gr. $+ (30 - 1)\ \frac{1}{6}$ Gr.
$= 21$ Gr. 10 Pf. Arbeitslohn für den letzten Fuß,
und $s = \frac{1}{2} \cdot 30\ (17$ Gr. $+ 21$ Gr. 10 Pf.)
$= 24$ Thlr. 6 Gr. 6 Pf. Arbeitslohn für den ganzen Brunnen.

4.

Das erſte Jahr betragen die Zinſen $\frac{1}{25} \cdot 3500 = 140$ Thlr. $= a$. Jedes Jahr kommen 300 Thlr. hinzu, hiervon betragen die Zinſen $\frac{1}{25} \cdot 300 = 12 = d$. Ferner iſt $n = 24$. Es iſt demnach

$s = \frac{1}{2} \cdot 24\ [2 \cdot 140 + (24 - 1)\ 12]$
$= 6672$ Thlr. ſämmtliche Intereſſen.

5.

Hier iſt $d = \frac{1}{4}$, $t = 14\frac{1}{2}$ und $n = 19$ gegeben, und a und s ſoll gefunden werden. Nach

Nr. 17 der Formeltafel für die arithmetiſchen Progreſſionen (ſiehe Meier Hirſch, Beiſpielſammlung S. 105) iſt

$$a = t - (n - 1)\,d,$$

$$\text{folgl. } a = 14\tfrac{1}{2} - (19 - 1)\,\tfrac{1}{4}$$

$$= 10 \text{ Meilen für den erſten Tag,}$$

$$\text{und } s = \tfrac{1}{2}n\,(a + t) = \tfrac{1}{2}\cdot 19\,(10 + 14\tfrac{1}{2})$$

$$= 232\tfrac{1}{4} \text{ Meilen, Länge des ganzen Weges.}$$

6.

Gegeben iſt $a = 1$, $t = 15$ und $n = 22$; geſucht wird d. Nun iſt nach Nr. 9. der Formeltafel

$$d = \frac{t - a}{n - 1},$$

$$\text{folgl. } d = \frac{15 - 1}{22 - 1} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}.$$

7.

Gegeben iſt $a = 5$, $t = 302$ und $d = 3$; geſucht wird n. Nach Nr. 13 der Formeltafel iſt

$$n = 1 + \frac{t - a}{d} = 1 + \frac{302 - 5}{3} = 100 \text{ Glieder.}$$

8.

Gegeben iſt $a = 100$, $t = 550$ und $d = 30$; geſucht wird n. Es iſt, wie vorher,

$$n = 1 + \frac{550 - 100}{30} = 16 \text{ Jahr.}$$

9.

Gegeben iſt $a = 600$, $d = 50$ und $s = 12950$; geſucht wird n und t. Nach Nr. 2 der Formeltafel iſt

$$t = -\tfrac{1}{2}d + \sqrt{[2ds + (a - \tfrac{1}{2}d)^2]},$$

alſo $t = -\tfrac{1}{2}\cdot 50 + \sqrt{[2\cdot 50\cdot 12950 + (600 - \tfrac{1}{2}\cdot 50)^2]}$

$= -25 + \sqrt{1625625} = 1250$ Thlr. für den letzten Monat,

und nach Nr. 15. $n = \dfrac{2s}{a+t} = \dfrac{2\cdot 12950}{600+1250} = 14$ Monate.

10.

Gegeben iſt $a = 15\frac{5}{8}$, $d = 31\frac{1}{4}$ und $n = 20$; geſucht wird t und s. Nach Nr. 1. der Formeltafel iſt

$t = a + (n-1)\,d = 15\frac{5}{8} + (20-1)\,31\frac{1}{4}$

$= 609\frac{3}{8}$ Fuß für die letzte Secunde,

und $s = \frac{1}{2}n(a+t) = \frac{1}{2}\cdot 20\,(15\frac{5}{8} + 609\frac{3}{8})$

$= 6250$ Fuß der ganze durchlaufene Raum.

11.

Gegeben iſt $a = 15\frac{5}{8}$, $d = 31\frac{1}{4}$ und $s = 4000$; geſucht wird n. Nach Nr. 14. der Formeltafel iſt

$$n = \frac{d-2a}{2d} + \sqrt{\left[\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2\right]},$$

alſo $n = \dfrac{31\frac{1}{4} - 2\cdot 15\frac{5}{8}}{2\cdot 31\frac{1}{4}} + \sqrt{\left[\dfrac{2\cdot 4000}{31\frac{1}{4}} + \left(\dfrac{2\cdot 15\frac{5}{8} - 31\frac{1}{4}}{2\cdot 31\frac{1}{4}}\right)^2\right]}$

$= \sqrt{\dfrac{2\cdot 4000}{31\frac{1}{4}}} = \sqrt{\dfrac{6400}{25}} = 16$ Secunden.

12.

Gegeben iſt $t = 78$, $d = 2$ und $s = 1350$; geſucht wird a und n. Nach Nr. 19. der Formeltafel iſt

$$a = \tfrac{1}{2}d + \sqrt{[(t + \tfrac{1}{2}d)^2 - 2ds]},$$

alſo $a = \tfrac{1}{2} \cdot 2 + \sqrt{[(78 + \tfrac{1}{2} \cdot 2)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1350]}$
$= 1 + \sqrt{841} = 30$ Thlr. für das erſte Jahr,

und $n = 1 + \frac{t - a}{d} = 1 + \frac{78 - 30}{2} = 25$ Jahr.

13.

Gegeben iſt $a = 20$, $t = 80$ und $s = 800$; geſucht wird n und d. Nach Nr. 15. der Formeltafel iſt

$n = \frac{2s}{a + t} = \frac{2 \cdot 800}{20 + 80} = 16$ Termine,

und $d = \frac{t - a}{n - 1} = \frac{80 - 20}{16 - 1} = 4$ Thlr., welche jeden Termin mehr bezahlt werden müſſen.

14.

Gegeben iſt $n = 15$, $d = 20$ und $s = 4200$; geſucht wird t. Nach Nr. 4. der Formeltafel iſt

$t = \frac{s}{n} + \frac{(n - 1)\, d}{2} = \frac{4200}{15} + \frac{(15 - 1)\, 20}{2}$
$= 420$ Kugeln in der unterſten Reihe.

15.

Man findet das arithmetiſche Mittel einer Reihe Zahlen, die um gleich viel zu wachſen, wenn man die

Summe dieſer Zahlen durch die Anzahl der Glieder dividirt. Man findet alſo hier das arithmetiſche Mittel der 12 verſchiedenen Thermometerſtände $= \frac{s}{12}$. Da nun, nach der Aufgabe, $\frac{s}{12} = 18\frac{3}{4}$, ſo iſt $s = 225$. Es iſt demnach gegeben $n = 12$, $d = \frac{1}{2}$ und $s = 225$; geſucht wird a. Nach Nr. 18. der Formeltafel iſt

$$a = \frac{s}{n} - \frac{(n-1)\,d}{2} = \frac{225}{12} - \frac{(12-1)\,\frac{1}{2}}{2}$$

= 16 Grade Thermometerſtand am 8ten.

16.

Das zweite Glied einer arithmetiſchen Progreſſion iſt $= a + d$ und das ſiebente $= a + 6d$. Es iſt alſo, nach der Aufgabe,

$$\text{I. } a + d + a + 6d = 2a + 7d = 92.$$

Ferner iſt das vierte Glied $= a + 3d$ und das eilfte $= a + 10d$. Es iſt demnach

$$\text{II. } 2a + 13d = 71.$$

Subtrahirt man (I.) von (II.), ſo erhält man

$6d = -21$, folgl. $d = -\frac{7}{2}$.*)

Subſtituirt man dieſen Werth von d in (I.) oder (II.), ſo findet man

$$a = 58\tfrac{1}{4},$$

und hieraus das zweite Glied $= a + d = 58\frac{1}{4} + (-\frac{7}{2}) = 58\frac{1}{4} - \frac{7}{2} = 54\frac{3}{4}$ Thlr. für den zweiten, und alſo iſt das ſiebente Glied $= 92 - 54\frac{3}{4} = 37\frac{1}{4}$ Thlr. für den 7ten. Ebenſo findet man das vierte Glied $= a + 3d = 58\frac{3}{4} - \frac{21}{2} = 47\frac{3}{4}$ Thlr., und hieraus das eilfte Glied $= 71 - 47\frac{3}{4} = 23\frac{1}{4}$ Thlr.

---

*) Man erhält hier eine negative Differenz, weil ſie zu einer fallenden Progreſſion gehört.

17.

Die beiden mittelſten Glieder ſind das neunte und zehnte Glied. Es iſt demnach

I. $a + 8d + a + 9d = 2a + 17d = 31\frac{1}{2}$.

Ferner iſt

II. $a\,(a + 17d) = a^2 + 17ad = 85\frac{1}{2}$.

Multiplicirt man (I.) mit a und ſubtrahirt davon (II.), ſo bleibt

$$a^2 - 31\tfrac{1}{2}\,a = -\,85\tfrac{1}{2},$$

folgl. $a = \frac{63}{4} + \sqrt{\left[\left(\frac{63}{4}\right)^2 - 85\frac{1}{2}\right]} = 3$ das erſte Glied. Subſtituirt man den Werth von a in (I.), ſo findet man

$$d = 1\tfrac{1}{2}.$$

18.

Beide Reiſende waren eine gleiche Anzahl Tage unterweges. Die Anzahl Tage ſei $= x$, ſo bilden die Meilen, welche der Reiſende von A aus gemacht, eine arithmetiſche Progreſſion, wovon $a = 2$, $d = \frac{1}{2}$ und $n = x$. Der Reiſende von B aus hat überhaupt 4x Meilen gemacht. Nach Nr. 5. der Formeltafel iſt demnach die Anzahl der Meilen, die der Reiſende von A aus überhaupt gemacht hat, oder

$$s = \tfrac{1}{2}x\,[2 \cdot 2 + (x - 1)\,\tfrac{1}{2}].$$

Hieraus folgt

$$\tfrac{1}{2}x\,[2\cdot 2 + (x-1)\,\tfrac{1}{2}] + 4x = 170,$$

$$\text{oder } x^2 + 23x = 680,$$

$$\text{folgl. } x = 17 \text{ Tage.}$$

In dieſen 17 Tagen hat der Reiſende von B aus $4\cdot 17 = 68$ Meilen gemacht. Die Anzahl der Meilen, die der Reiſende von A aus zurückgelegt hat, oder der Ort, wo ſie beide zuſammentreffen, iſt daher

$$= 170 - 68 = 102 \text{ Meilen von A.}$$

19.

Da alle Jahr 500 Thlr. angelegt werden, und ſich daher auch die Zinſen jährlich um 25 Thlr. vermehren, Zinſeszinſen jedoch nicht angerechnet werden ſollen, ſo bilden die jährlich angelegten Summen unter ſich eine arithmetiſche Progreſſion, wovon $a = 500$ Thlr., $d = 25$ und $s = 6875$ Thlr.; man ſuche n. Nach Nr. 14. der Formeltafel iſt

$$n = \frac{25-1000}{50} \pm \sqrt{\left[\frac{2\cdot 6875}{25} + \left(\frac{1000-25}{50}\right)^2\right]}$$

$$= 11.$$

Da nun bei Beſtimmung der Jahre, nach welchen das Vermögen auf 6875 Thlr. angewachſen iſt, das erſte Glied nicht mitgezäht werden kann, ſo iſt die geſuchte Zeit

$$= 11 - 1 = 10 \text{ Jahr.}$$

20.

Von dieſer Aufgabe, ſo wie auch von den folgenden Aufgaben bis incl. Nr. 27 ſind die Auflöſungen in den Lehrſätzen über die figurirten Zahlen ſelbſt unmittelbar enthalten. Das Wichtigſte hierüber iſt in der Beiſpielſammlung S. 105. auseinandergeſetzt. Die Auflöſungen ſind daher hier zur Erſparung des Raumes weggeblieben.

28.

Hier iſt das erſte Glied $a = \frac{1}{2}$ Gr., der Exponent $e = 3$ und die Anzahl der Glieder $n = 12$ einer geometriſchen Progreſſion gegeben. In der Formeltafel der geometriſchen Progreſſionen (ſiehe M. Hirſch, Beiſpielſammlung S. 110) findet man die Formeln

$$t = ae^{n-1},$$

$$s = \frac{et - \varepsilon}{e - 1} = \frac{a\,(e^n - 1)}{e - 1}$$

angegeben. Man braucht daher nur jene Zahlen in dieſen Formeln zu ſubſtituiren. Es iſt demnach

$$t = \tfrac{1}{2} \cdot 3^{12-1} = \frac{3^{11}}{2}\,\text{Gr.} = 3690\,\text{Thlr.}\ 13\,\text{Gr.}\ 6\,\text{Pf.},$$

$$\text{und } s = \frac{3 \cdot (3690\ \text{Thlr.}\ 13\ \text{Gr.}\ 6\ \text{Pf.}) - \tfrac{1}{2}\ \text{Gr.}}{3 - 1}$$

$$= 5535\ \text{Thlr.}\ 20\ \text{Gr.}$$

29.

Gegeben iſt das erſte Glied $a = 1$, der Exponent $e = 2$ und die Anzahl der Glieder $n = 64$; geſucht wird s. Es iſt demnach

$$s = \frac{1 \cdot (2^{64} - 1)}{2 - 1} = 2^{64} - 1$$

$$= 18{,}446744{,}073709{,}551615.$$*)

30.

Bei jeder Erndte habe ſich die Ausſaat um $x$mal vermehrt. Es war alſo die Erndte im erſten Jahre $= x$, im zweiten Jahr $= x^2$, im dritten Jahr $= x^3$ und endlich im zehnten Jahr $= x^{10}$. Es iſt demnach

$$x^{10} = 1048576,$$

$$\text{folgl. } x = \sqrt[10]{1048576}.$$

Dieſe Wurzel läßt ſich am leichteſten durch Logarithmen finden. Es iſt nämlich $\log. \sqrt[10]{1048576}$

$$= \frac{\log. 1048576}{10} = \frac{6{,}0206000}{10} = 0{,}6020600.$$

Zu dieſem Logarithmen gehört die Zahl 4. Es iſt alſo

$$x = 4.$$

31.

x ſei die Zahl, mit welcher die Volksmenge eines jeden Jahres multiplicirt werden muß, um die durch den jährlichen Zuwachs vermehrte Volksmenge des nächſtfolgenden Jahres zu erhalten, ſo iſt die Volksmenge am Ende des erſten Jahres $10000x$, am Ende des zweiten $10000x^2$, am Ende des dritten $10000x^3$ und am Ende des vierten $10000x^4$. Es iſt demnach

---

*) Um dieſe Potenz am leichteſten zu erhalten, braucht man nur den Exponenten 64 in ſeine einfachen Factoren $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ zu zerfällen. Man erhält alſo nach und nach $2^2 = 4$, $4^2 = 16$, $16^2 = 256$, $256^2 = 65536$, $65536^2 = 4294967296$, $4294967296^2 = 18446744073709551616$. Hiervon 1 abgezogen, giebt die verlangte Zahl.

$$10000x^4 = 14641,$$

$$\text{folgl. } x = \sqrt[4]{1,4641} = \sqrt{\sqrt{1,4641}} = \tfrac{11}{10}.$$

Da alſo die Volksmenge eines jeden Jahres um ſo viel anwächſt, daß ſie $\frac{11}{10}$ des nächſtvorhergehenden Jahres beträgt, ſo vermehrt ſie ſich jährlich um $\frac{1}{10}$.

32.

Da hier das erſte Glied 1 iſt, ſo iſt das zweite Glied der Exponent ſelbſt. Es iſt alſo $a = 1$, $t = 3$ und $n = 12$ gegeben, und e wird geſucht. Nun iſt nach Nr. 13. der Formeltafel der geometriſchen Progreſſionen

$$e = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} = \sqrt[11]{3}.$$

Hieraus findet man mit Hülfe der Logarithmen das zweite Glied oder $e = 1,105\ldots$

33.

Gegeben iſt $a = 5$, $t = 80$ und $n = 32$. Es iſt daher nach Nr. 13. der Formeltafel

$$e = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} = \sqrt[31]{16},$$

$$\text{alſo log. } e = \frac{\log. 16}{31} = \frac{1,2041200}{31} = 0,0388429.$$

Zu dieſem Logarithmen gehört die Zahl $1{,}0935 = e$. Ferner iſt nach Nr. 6. der Formeltafel

$$s = \frac{et - a}{e - 1} = \frac{1{,}0935 \cdot 80 - 5}{1{,}0935 - 1} = \frac{82{,}484}{0{,}0935}$$
$$= 882{,}19 \ldots\ldots$$

Endlich iſt nach Nr. 1. der Formeltafel

$$t = ae^{n-1} = 5 \cdot 1{,}0935^{19},$$
$$\text{oder } \log.\ t = \log.\ 5 + 19 \cdot \log.\ 1{,}0935$$
$$= 1{,}4365272.$$

Zu dieſem Logarithmen gehört die Zahl 27,351 ...

34.

Es ſei das erſte Glied der zu ſuchenden Progreſſion $= x$ und der Exponent $= y$, ſo hat man die beiden Gleichungen:

$$\text{I. } x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 = 157\tfrac{1}{2},$$
$$\text{II. } xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 = 315.$$

Multiplicirt man (I.) mit y und zieht dieſe Gleichung von (II.) ab, ſo bleibt

$$315 - 157\tfrac{1}{2}y = 0,$$
$$\text{folgl. } y = 2 = \text{dem Exponenten } e.$$

Da nun die Summe der erſten 6 Glieder bekannt iſt, ſo iſt gegeben

$$n = 6,\ e = 2 \text{ und } s = 157\tfrac{1}{2}.$$

Hieraus findet man nach Nr. 10. der Formeltafel

$$a = \frac{(e - 1)s}{e^n - 1} = \frac{(2 - 1)\ 157\tfrac{1}{2}}{2^6 - 1} = \frac{157\tfrac{1}{2}}{63}$$
$$= \frac{315}{126} = 2\tfrac{1}{2},$$

folgl. iſt die geſuchte Progreſſion

$2\frac{1}{2}$, 5, 10, 20, 40, 80, 160.

35.

Für die Auflöſung dieſer Aufgabe ſowohl, als der folgenden bis zu Ende dieſes Abſchnittes gilt dieſelbe Bemerkung, wie von der 35. Aufgabe des X. Abſchnittes Seite 367.

XII.

Auflöſungen der Aufgaben aus der Zins- und Rentenrechnung, nebſt den Auflöſungen einiger anderer dahin gehöriger Aufgaben.

(Zu M. Hirſch, Sammlung von Beiſpielen ꝛc. XXI. Kapitel, von S. 284 bis S. 293.)

1.

Da der Zinsfuß $= p$ iſt, alſo aus einem Thaler Kapital nach Verlauf eines Jahres durch die hinzukommenden Intereſſen p Thlr. werden, ſo werden aus a Thlrn. am Ende des erſten Jahres ap Thlr. Ferner werden aus ap Thlrn. am Ende des zweiten Jahres ap^2 Thlr.; aus ap^2 Thlrn. werden am Ende des dritten Jahres ap^3 Thlr. u. ſ. w. Hieraus ergiebt ſich alſo, daß aus a Thlrn. nach n Jahren ap^n Thlr. werden.

2.

Hier iſt $a = 5000$, $n = 40$ und $p = \frac{26}{25}$.*) Folglich wird aus dem Kapitale x nach 40 Jahren

---

*) Weil nämlich bei 4 Procent Intereſſen aus 100 Thlrn. nach einem Jahre 104 Thlr. werden, ſo wird aus einem Thaler $\frac{104}{100} = \frac{26}{25}$ Thlr.

$5000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{40}$; durch Logarithmen findet man

$$x = 24405{,}1 \; . \; . \; . \text{ Thlr.}$$

3.

Hier iſt $a = 3200$, $n = 80$ und $p = \frac{103}{100}$. Folglich wird das Kapital x nach 80 Jahren

$3200 \cdot \left(\frac{103}{100}\right)^{80}$; durch Logarithmen findet man

$$x = 34050{,}8 \; . \; . \; . \text{ Thlr.}$$

4.

Hier iſt $a = 32500$, $n = 24$ und $p = \frac{103}{100}$. Folglich wird der Inhalt x des Reviers nach 24 Jahren

$32500 \cdot \left(\frac{103}{100}\right)^{24}$; durch Logarithmen findet man

$$x = 66065{,}8 \; . \; . \; . \text{ Klafter.}$$

5.

Hier iſt $a = 200000$, $n = 100$ und $p = \frac{51}{50}$. Folglich iſt die Volksmenge x nach 100 Jahren

$200000 \cdot \left(\frac{51}{50}\right)^{100}$; durch Logarithmen findet man

$$x = 1448927 \text{ beinahe.}$$

6.

Wenn aus 100 Thlrn. Kapital nach einem Jahre 106 Thlr. werden, ſo werden daraus nach einem halben Jahre 103 Thlr. Es iſt demnach $p = \frac{103}{100}$, und da in 10 Jahren 20 halbe Jahre vorkommen, ſo iſt $n = 20$. Folglich iſt das Kapital x nach 10 Jahren

$12000 \cdot \left(\frac{103}{100}\right)^{20}$; durch Logarithmen findet man

$$x = 21673 \text{ Thlr. } 8 \text{ Gr. ungefähr.}$$

7.

Die Anzahl der geſuchten Jahre mag x ſein, ſo werden die 3600 Thlr. Kapital nach x Jahren

$3600 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^x$ oder log. 3600 + x (log. 21 − log. 20)

$$= 3{,}5563025 + 0{,}0211893x.$$

Nun betragen 5000 Thlr. zu 4 Procent in 12 Jahren $5000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{12}$. Der Logarithmus dieſes Ausdrucks iſt 3,9033696. Es iſt daher, nach der Aufgabe,

$$3{,}5563025 + 0{,}0211893x = 3{,}9033696.$$

Multiplicirt man beide Theile dieſer Gleichung mit 10000000, ſo iſt

$$35563025 + 211893x = 39033696,$$

folgl. x = 16 Jahr beinahe.

8.

Die Anzahl der geſuchten Jahre mag ebenfalls = x ſein, ſo wird das Kapital a nach x Jahren

$$= ap^x = \log. a + x \log. p.$$

Ferner beträgt das Kapital a′ zum Zinsfuß p′ in n Jahren $a'p'^n$ oder log. a′ + n log. p′. Es iſt daher

$$\log. a + x \log. p = \log. a' + n \log. p',$$

$$\text{folgl. } x = \frac{\log. a' + n \log. p' - \log. a}{\log. p}.$$

9.

Das Kapital ſei x Thlr., ſo iſt es in 15 Jahren auf $x \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{15}$ angewachſen; ferner betragen 4500 Thlr. zu 6 Procent nach 9 Jahren $4500 \cdot \left(\frac{53}{50}\right)^{9}$. Es iſt demnach

$$x \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{15} = 4500 \cdot \left(\frac{53}{50}\right)^{9}.$$

Setzt man für dieſe Ausdrücke ihre Logarithmen, ſo erhält man

$$\log. x + 15\,(\log. 26 - \log. 25) = \log. 4500$$
$$+ 9\,(\log. 53 - \log. 50),$$

oder $\log. x + 0{,}2554995 = 3{,}8809656$,

folgl. $\log. x = 3{,}6254661$,

mithin $x = 4221$ Thlr. ungefähr.

10.

Das Kapital ſei wiederum $= x$, ſo iſt es zu dem Zinsfuß p nach n Jahren auf xp^n angewachſen. Ferner beträgt das Kapital a′ zum Zinsfuß p′ nach n′ Jahren $a'p'^{n'}$. Es iſt demnach

$$xp^n = a'p'^{n'},$$

oder $\log. x + n \log. p = \log. a' + n' \log. p'$,

folgl. $\log. x = \log. a' + n' \log. p' - n \log. p$.

Aus dem Logarithmus von x läßt ſich mittelſt der Tabelle das Kapitel x ſelbſt finden.

11.

Der geſuchte Zinsfuß ſei $= x$. Es beträgt daher das Kapitel a zum Zinsfuß x nach n Jahren ax^n und das Kapitel a' zum Zinsfuß p' nach n' Jahren $a'p'^{n'}$. Es iſt alſo

$$ax^n = a'p'^{n'},$$

oder $\log. a + n \log. x = \log. a' + n' \log. p'$,

folgl. $\log. x = \frac{\log. a' + n' \log. p' - \log. a}{n}$.

12.

Zuerſt berechne man, was aus 7963 Thlrn. zu 5 Procent auf Zinſeszinſen nach 5 Jahren wird; man erhält

$7963 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^5$; durch Logarithmen findet man

10163 Thlr. beinahe.

Hiervon ſubtrahire man 576, und unterſuche, was aus den übrig bleibenden 9587 Thlrn. nach 3 Jahren wird. Man findet

$9587 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^3$; durch Logarithmen erhält man

11098 Thlr. beinahe.

Hiervon ſubtrahire man 498 Thlr., und unterſuche endlich, was aus den übrig bleibenden 10600 Thlrn. nach 2 Jahren wird, ſo findet man

$10600 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^2$; durch Logarithmen erhält man

11686 Thlr. ungefähr.

13.

Man ſetze, aus einem Thaler Kapital wird nach Verlauf eines halben Jahres x Thlr., folglich werden aus 100 Thlrn. 100x Thlr. und alſo am Ende eines ganzen Jahres $100x^2$ Thlr. Nun ſind, nach der Aufgabe, die zährlichen Zinſen zu 5 Procent gerechnet d. h. aus 100 Thlrn. Kapital werden nach einem Jahre 105 Thlr. Es iſt demnach

$$100x^2 = 105,$$

$$\text{folgl. } x = 1{,}0247\ldots$$

Da nun aus einem Thaler 1,0247... Thlr. wird, ſo werden aus 100 Thlrn. 102,47 Thlr. Die halbjährlichen Procente betragen daher 2,47 Thlr. beinahe.

Auf eine ähnliche Art findet man die vierteljährlichen Zinſen, wenn man ſetzt

$$100x^4 = 105,$$

$$\text{alſo } x = \sqrt[4]{1{,}05}$$

$$= 1{,}0123.$$

Mithin werden aus 100 Thlrn. nach einem Vierteljahre 101,23 Thlr. Die vierteljährlichen Procente ſind alſo 1,23 Thlr.

14.

Die geſuchten Intereſſen ſeien = x Thlr. d. h. man ſetze, aus einem Thaler Kapital werde nach Verlauf von $\frac{1}{n}$ Jahr 1 + x Thaler, und alſo in einem ganzen Jahre $(1 + x)^n$. Da nun der Zinsfuß = p, d. h. nach Verlauf eines Jahres wird aus einem Thaler Kapital durch die hinzukommenden Intereſſen p Thaler, ſo iſt

$$(1 + x)^n = p,$$

$$\text{alſo } x = \sqrt[n]{p} - 1 \text{ für 1 Thlr. Kapital,}$$

$$\text{und } 100\,(\sqrt[n]{p} - 1) \text{ für 100 Thlr. Kapital.}$$

15.

Das Kapital ſei $= 1$, ſo wird daraus nach x Jahren zu 4 Procent auf Zinſeszinſen $1 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^x$. Es iſt demnach, der Aufgabe gemäß,

$$\left(\frac{26}{25}\right)^x = 2.$$

Hiernach findet man vermittelſt Logarithmen

$$x = \frac{0{,}3010300}{0{,}0170333} = \frac{3010300}{170333} = 17 \text{ Jahr ungefähr.}$$

Nach dem zweiten Theil der Aufgabe findet man

$$\left(\frac{26}{25}\right)^x = 3,$$

$$\text{folgl. } x = \frac{0{,}4771213}{0{,}0170333} = \frac{4771213}{170333} = 29 \text{ Jahr beinahe.}$$

16.

Das Kapital ſei wiederum 1, ſo wird daraus zum Zinsfuß p nach x Jahren p^x. Es iſt demnach $p^x = m$,

$$\text{folgl. } x = \frac{\log.\, m}{\log.\, p}.$$

17.

Die Anzahl der Procente ſei ſo groß, daß aus einem Thaler Kapital jährlich x Thlr. wird, mithin werden aus 600 Thlrn. nach drei Jahren $600x^3$. Es iſt demnach

$$600x^3 = 800,$$

$$\text{folgl. } x = 1{,}1006\ \ldots$$

Da nun aus einem Thaler nach einem Jahre 1,1006... Thlr. wird, ſo werden aus 100 Thlrn. 110,06. Mithin betragen die Procente etwas mehr, als 10 Thlr.

18.

Das Kapital a wächſt bei dem Zinsfuß von p in n Jahren auf ap^n an. Es iſt demnach

$$ap^n = A,$$

$$\text{folgl. } \log. p = \frac{\log. A - \log. a}{n}.$$

19.

Die Summe, welche jetzt baar bezahlt wird, ſei $= x$. Dieſes Kapital beträgt zu 4 Procent auf Zinſeszinſen nach 6 Jahren $x \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^6$. Es iſt daher, nach der Aufgabe,

$$x \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^6 = 3750,$$

oder, durch Logarithmen ausgedrückt,

$$\log. x + 6\,(\log. 26 - \log. 25) = \log. 3750,$$

$$\text{alſo } \log. x = 3{,}5740313 - 0{,}1021998 = 3{,}4718315,$$

$$\text{folgl. } x = 2963{,}6 = 2963 \text{ Thlr. } 15 \text{ Gr. ungefähr.}$$

20.

Die Summe, welche jetzt baar bezahlt wird, ſei wieder $= x$. Dieſes Kapital beträgt zum Zinsfuß p in n Jahren xp^n. Ebenſo iſt das Kapital a zu demſelben Zinsfuß nach n Jahren $= ap^n$. Es iſt demnach

$$xp^n = a,$$

$$\text{folgl. } x = \frac{a}{p^n}.$$

21.

Verfährt man hier, wie bei der vorigen Aufgabe, ſo iſt

$$x \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{20} = 500,$$

oder, durch Logarithmen ausgedrückt,

$$\log. x + 20 (\log. 26 - \log. 25) = \log. 500,$$

$$\text{alſo } \log. x = 2{,}6989700 - 0{,}3406661 = 2{,}3583040,$$

folgl. x = 228 Thlr. ungefähr.

22.

Die Volksmenge vor 10 Jahren ſei = x. Da man ſich nun die jährliche Vermehrung einer Volksmenge wie jährliche Vermehrung eines Kapitals durch Zinſeszinſen vorſtellen kann, ſo beträgt die Volksmenge am Ende des zehnten Jahres $x \cdot \left(\frac{103}{100}\right)^{10}$. Es iſt demnach

$$x \cdot \left(\frac{103}{100}\right)^{10} = 20000,$$

oder durch Logarithmen ausgedrückt,

$$\log. x + 10 (\log. 103 - \log. 100) = \log. 20000,$$

$$\text{alſo } \log. x = 4{,}1726580,$$

folgl. x = 14882 Seelen.

23.

Hier findet man auf eine ähnliche Art, wie vorher, die Gleichung

$$x \cdot \left(\frac{51}{50}\right)^{10} = 30000,$$

oder, durch Logarithmen ausgedrückt,

$$\log. x + 10 (\log. 51 - \log. 50) = \log. 30000,$$

$$\text{alſo } \log. x = 4{,}3911193,$$

$$\text{folgl. } x = 24610 \text{ Klafter.}$$

24.

Die 30000 Thlr., welche der erſte baar bezahlen will, betragen zu 5 Procent Zinzeszinſen nach drei Jahren

$$30000 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^3 = 34728,$$

und nach ſieben Jahren

$$30000 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^7 = 42213 \text{ Thlr.}$$

Hieraus ergiebt ſich alſo, daß das Gebot des erſten größer iſt, als das der beiden andern. Nun findet man ferner das Gebot x des zweiten an baarem Werthe, wenn man ſetzt

$$x \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^3 = 33500,$$

$$\text{oder } \log. x + 0{,}0635679 = 4{,}5250448,$$

$$\text{alſo } \log. x = 4{,}4614769,$$

$$\text{folgl. } x = 28938 \text{ Thlr.}$$

Hieraus ergiebt ſich, daß das Gebot des erſten um

1062 Thlr. mehr beträgt, als das Gebot des zweiten an baarem Gelde ausmacht. Setzt man endlich

$$x \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^7 = 40000,$$

ſo findet man auf eine ähnliche Art, wie vorher,

$$x = 28427 \text{ Thlr.},$$

und alſo beträgt der Ueberſchuß des Gebots des erſten gegen das Gebot des dritten, an baarem Werthe gerechnet, 1573 Thlr.

25.

Wenn die Volksmenge = 1 angenommen wird, ſo wird ſie nach x Jahren $= 1 \cdot \left(\frac{103}{100}\right)^x$. Es iſt demnach

$$\left(\frac{103}{100}\right)^x = 10,$$

oder logarithmiſch $0{,}0128372x = 1$,

folgl. $x = \frac{1}{0{,}0128372} = \frac{10000000}{128372} = 78$ Jahr ungefähr.

26.

Das Kapital mag ſo benutzt worden ſein, daß aus einem Thaler nach einem Jahre x Thlr., folglich aus 800 Thlrn. nach einem Jahre 800x und alſo nach 6 Jahren $800x^6$ geworden ſind. Es iſt demnach

$$800x^6 = 3600,$$

alſo $x^6 = \frac{9}{2}$ oder $6 \cdot \log. x = \log. 9 - \log. 2$,

folgl. $\log x = 0{,}1088687$,

und mithin $x = 1{,}2848$.

Da nun aus einem Thaler nach einem Jahre 1,2848 Thlr. geworden iſt, ſo müſſen aus 100 Thlrn. 128,48 Thlr. geworden ſein. Die geſuchten Procente betragen alſo beinah $28\frac{1}{2}$ Thlr.

27.

Man findet die Größe des Kapitals nach n Jahren, wenn man folgendermaßen ſchließt. Das Kapital wird

nach 1 Jahre $ap \pm b$,
nach 2 Jahren $ap^2 \pm bp \pm b$,
nach 3 Jahren $ap^3 \pm bp^2 \pm b$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$$

nach n Jahren $ap^n \pm bp^{n-1} \pm bp^{n-2} \ldots \pm bp \pm b$.

Hieraus ergiebt ſich, daß das geſuchte Kapital aus zwei Theilen beſteht, nämlich aus ap^n und aus der Summe einer geometriſchen Progreſſion, wovon das erſte Glied b, der Exponent p und die Anzahl der Glieder n iſt. Die Summe dieſer geometriſchen Progreſſion iſt $= \frac{b(p^n - 1)}{p - 1}$. Es iſt demnach das Kapital nach n Jahren

$$ap^n \pm \frac{b(p^n - 1)}{p - 1}.$$

28.

Hier iſt $a = 6000$, $b = 500$, $n = 10$ und $p = \frac{21}{20}$. Es iſt daher das geſuchte Kapital

$$x = 6000\cdot\left(\frac{21}{20}\right)^{10} + \frac{500\left[\left(\frac{21}{20}\right)^{10} - 1\right]}{\frac{21}{20} - 1}.$$

Dividirt man den Zähler $500\left[\left(\frac{21}{20}\right)^{10} - 1\right]$ durch den Nenner $\frac{21}{20} - 1 = \frac{1}{20}$, ſo erhält man

$$x = 6000\cdot\left(\frac{21}{20}\right)^{10} + 10000.\left(\frac{21}{20}\right)^{10} - 10000$$

$$= 16000\cdot\left(\frac{21}{20}\right)^{10} - 10000.$$

Nun findet man vermittelſt Logarithmen $16000\cdot\left(\frac{21}{20}\right)^{10} = 26062$, folglich iſt

$$x = 26062 - 10000 = 16062 \text{ Thlr. ungefähr.}$$

29.

Hier iſt $a = 3740$, $n = 8$, $b = 450$ und $p = \frac{26}{25}$. Man findet, wie vorher,

$$x = 3740\cdot\left(\frac{26}{25}\right)^{8} + \frac{450\left[\left(\frac{26}{25}\right)^{8} - 1\right]}{\frac{26}{25} - 1}$$

$$= 14990\cdot\left(\frac{26}{25}\right)^{8} - 11250 = 20514 - 11250$$

$$= 9264 \text{ Thlr. ungefähr.}$$

30.

Hier iſt $a = 15467$, $n = 10$, $b = 600$ und $p = \frac{21}{20}$. Es iſt daher

$$x = 15467 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^{10} - \frac{600\left[\left(\frac{21}{20}\right)^{10} - 1\right]}{\frac{21}{20} - 1}$$

$$= 3467 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^{10} + 12000 = 5647 + 12000$$

$$= 17647 \text{ Thlr. ungefähr.}$$

31.

Hier iſt $a = 5000$, $n = 10$, $b = 400$ und $p = \frac{21}{20}$. Es iſt demnach

$$x = 5000 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^{10} - \frac{400\left[\left(\frac{21}{20}\right)^{10} - 1\right]}{\frac{21}{20} - 1}$$

$$= 8000 - 3000 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^{10} = 8000 - 4886{,}6$$

$$= 3113 \text{ Thlr. ungefähr.}$$

32.

Da der Kaufmann jetzt baar 4000 Thlr. und außerdem beim Anfange jedes der folgenden 5 Jahre noch 4000 Thlr. zu bezahlen hat, ſo iſt $a = 4000$, $b = 4000$, $n = 6$ und $p = \frac{26}{25}$. Es iſt alſo

$$x = 4000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{6} + \frac{4000\left[\left(\frac{26}{25}\right)^{6} - 1\right]}{\frac{26}{25} - 1}$$

$$= 104000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{6} - 100000 = 131593 - 100000$$

$$= 31593 \text{ Thlr. ungefähr.}$$

33.

Hier iſt $a = 30000$, $b = 800$, $n = 15$ und $p = \frac{26}{25}$. Es iſt demnach

$$x = 30000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{15} - \frac{800\left[\left(\frac{26}{25}\right)^{15} - 1\right]}{\frac{26}{25} - 1}$$

$$= 20000 + 10000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{15} = 20000 + 18009$$

$$= 38009 \text{ Thlr. ungefähr.}$$

34.

Hier iſt $a = 100000$, $b = 6000$ und $p = \frac{21}{20}$. Setzt man daher die geſuchte Anzahl Jahr $= x$, ſo iſt

$$100000 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^{x} - \frac{6000\left[\left(\frac{21}{20}\right)^{x} - 1\right]}{\frac{21}{20} - 1} = 0,$$

$$\text{oder } 120000 - 20000 \left(\frac{21}{20}\right)^{x} = 0.$$

Hieraus findet man durch Logarithmen

$$0{,}0211893x = 5{,}0791812 - 4{,}3010300 = 0{,}7781512,$$

folgl. $x = \frac{0{,}7781512}{0{,}0211893} = \frac{7781512}{211893} = 36$ bis 37 Jahr.

35.

In x Jahren. Nun iſt

$$ap^{x} \pm \frac{b\,(p^{x} - 1)}{p - 1} = a',$$

oder $ap^x(p-1) \pm bp^x \mp b = a'(p-1)$,

$$p^x[(p-1)a \pm b] = (p-1)a' \pm b,$$

$$x \log. p + \log. [(p-1)a \pm b] = \log. [(p-1)a' \pm b],$$

folgl. $x = \dfrac{\log. [(p-1)a' \pm b] - \log. [(p-1)a \pm b]}{\log. p}$.

36.

In dieſem Falle iſt $a' = 0$, und alſo auch $(p-1)a' = 0$.

Es iſt demnach $x = \dfrac{\log. b - \log. [b-(p-1)a]}{\log. p}$.

37.

Die geſuchte Summe w muß ſo groß ſein, daß, wenn man ſie auf Zinſeszinſen zum Zinsfuß p auf eine Rente giebt und jährlich die Rente v davon wegnimmt, nach Verlauf von n Jahren alles aufgezehrt ſei. Es iſt alſo

$$wp^n - \frac{r(p^n-1)}{p-1} = 0,$$

folgl. $w = \dfrac{(p^n-1)r}{(p-1)p^n}$.

38.

Die Summe, welche man ihm an baarem Gelde zu geben hat, muß ſo groß ſein, daß, wenn man ſie auf Zinſeszinſen zu $3\frac{1}{2}$ Procent verleihet, und jährlich 500 Thlr. davon nimmt, nach Verlauf von 6 Jahren alles verzehrt ſei. Da nun $b = 500$, $n = 6$ und $p = \dfrac{103\frac{1}{2}}{100} = \dfrac{207}{200}$, ſo iſt

$$x \cdot \left(\frac{207}{200}\right)^6 - \frac{500 \cdot \left[\left(\frac{207}{200}\right)^6 - 1\right]}{\frac{207}{200} - 1} = 0,$$

$$\text{oder } x \cdot \left(\frac{207}{200}\right)^6 = \frac{100000}{7} \cdot \left[\left(\frac{207}{200}\right)^6 - 1\right].$$

Erhebt man mittelſt Logarithmen die beiden Brüche $\frac{207}{200}$ zur ſechſten Potenz, und verwandelt $\frac{100000}{7}$ in einen Decimalbruch, ſo iſt

$$1{,}2292x = 14285{,}7 \cdot 1{,}2292 - 14285{,}7,$$

$$\text{folgl. } x = 2664 \text{ Thlr. ungefähr.}$$

39.

Hier iſt $b = 350$, $n = 8$ und $p = \frac{26}{25}$. Es iſt demnach

$$x \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^8 - \frac{350\left[\left(\frac{26}{25}\right)^8 - 1\right]}{\frac{26}{25} - 1} = 0,$$

$$\text{oder } 1{,}3685x = 8750 \cdot 1{,}3685 - 8750,$$

$$\text{folgl. } x = 2356 \text{ Thlr. ungefähr.}$$

40.

Hier iſt $b = 400$, $n = 12$ und $p = \frac{103}{100}$. Es iſt daher

$$x \cdot \left(\frac{103}{100}\right)^{12} - \frac{400\left[\left(\frac{103}{100}\right)^{12} - 1\right]}{\frac{103}{100} - 1} = 0,$$

oder $1{,}4257x = 13333{,}3 \cdot 1{,}4257 - 13333{,}3$,
folgl. $x = 3981$ Thlr. ungefähr.

41.

Es iſt nach der 37. Auflöſung

$$wp^n(p-1) = r(p^n-1),$$

$$\text{folgl. } r = \frac{wp^n(p-1)}{p^n-1}.$$

42.

Hier iſt $a = 1200$, $n = 7$ und $p = \frac{26}{25}$. Es iſt demnach

$$1200 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^7 - \frac{x\left[\left(\frac{26}{25}\right)^7 - 1\right]}{\frac{26}{25}-1} = 0,$$

oder $1200 \cdot 1{,}3159 = 25x \cdot 1{,}3159 - 25x$,
alſo $x \cdot (25 \cdot 1{,}3159 - 25) = 1200 \cdot 1{,}3159$,
folgl. $x = 200$ Thlr. beinahe.

43.

Hier iſt $a = 20000$, $n = 13$ und $p = \frac{26}{25}$. Es iſt alſo

$$20000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{13} - \frac{x\left[\left(\frac{26}{25}\right)^{13} - 1\right]}{\frac{26}{25}-1} = 0,$$

oder $20000 \cdot 1{,}665 = 25x \cdot 1{,}665 - 25x$,
alſo $x \cdot (25 \cdot 1{,}665 - 25) = 20000 \cdot 1{,}665$,
folgl. $x = 2003$ Thlr. ungefähr.

44.

Hier iſt $a = 20000$, $b = 1500$ und $p = \frac{21}{20}$. Es iſt demnach

$$20000 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^x - \frac{1500\left[\left(\frac{21}{20}\right)^x - 1\right]}{\frac{21}{20} - 1} = 0,$$

$$\text{oder } 10000 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^x = 30000,$$

oder, durch Logarithmen ausgedrückt,

$$4 + 0{,}0211893x = 4{,}4771213,$$

folgl. $x = 22$ Jahr ungefähr.

45.

Hier iſt $a = 34580$, $b = 2000$ und $p = \frac{26}{25}$. Es iſt daher

$$34580 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^x - \frac{2000\left[\left(\frac{26}{25}\right)^x - 1\right]}{\frac{26}{25} - 1} = 0,$$

$$\text{oder } 15420 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^x = 50000,$$

oder, durch Logarithmen ausgedrückt,

$$4{,}1880844 + 0{,}0170333x = 4{,}6989700,$$

folgl. $x = 30$ Jahr ungefähr.

46.

Die Auflöſung dieſer Aufgabe, ſowie der folgenden bis zu Ende dieſes Abſchnittes findet man durch die in der 27. Auflöſung dargeſtellte Formel, weshalb ſie hier weggeblieben ſind.

XIII.

Auflöſungen der Aufgaben für die Permutationen, Combinationen und Variationen, desgleichen für die Wahrſcheinlichkeitsrechnung.

(Zu M. Hirſch, Sammlung von Beiſpielen ꝛc. XXII. Kapitel, von S. 294 bis 305)

1.

Um die Anzahl dieſer Verwechſelungen zu erhalten, muß man, wie man aus der Lehre von den Permutationen weiß, folgende Factoren mit einander multipliciren

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8,$$

welche zum Producte 40320 für die Anzahl der Verwechſelungen geben.

2.

Auch hier muß man das Product

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24$$

machen, woraus man 620448,401733,239439,360000 erhält.

3.

Da hier der Buchſtabe a oder b oder c bei jeder Verſetzung in der erſten Stelle bleiben und alſo nicht mit verſetzt werden ſoll, ſo braucht man nur die Anzahl der Verſetzungen der übrigen ſechs Buchſtaben zu ſuchen. Da ſich nun ſechs Buchſtaben 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 = 720mal verſetzen laſſen, ſo giebt es auch 720 Verſetzungen, die ſich mit a oder b oder c anfangen.

4.

Hier ſollen die Buchſtaben a b bei jeder Verſetzung immer in der erſten Stelle bleiben und alſo nicht mit verſetzt werden. Da ſich nun die übrigen fünf Buchſtaben 1 · 2 · 3 · 4 · 5 = 120mal verſetzen laſſen, ſo giebt es auch 120 Verſetzungen, die ſich mit a b anfangen. Ebenſo findet man 24 Verſetzungen, welche ſich mit a b c anfangen, weil ſich die übrigen vier Buchſtaben 1 · 2 · 3 · 4 = 24mal verſetzen laſſen. Endlich giebt es ſechs Verſetzungen, die ſich mit a b c d anfangen, weil ſich die übrigen drei Buchſtaben 1 · 2 · 3 = 6mal verſetzen laſſen.

5.

Die vier Buchſtaben a b c d ſollen, nach der Aufgabe, in dieſer Ordnung, ohne irgend eine Verſetzung zu erleiden, zuſammen bleiben; man kann daher a b c d nur als ein Glied anſehen, und man hat alſo nur die vier Glieder abcd e f g zu verſetzen. Dieſes giebt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Verſetzungen.

6.

Hier iſt alles, wie in der vorigen Aufgabe, nur daß das Glied abcd nicht in der einzigen Ordnung, ſo wie es ſich hier befindet, ſtehen bleiben, ſondern alle mögliche Verſetzungen erleiden ſoll. Nun hatte man in der vorigen Aufgabe bereits 24 Verſetzungen, worin jedesmal das Glied abcd vorkam; da ſich nun dieſes Glied ſelbſt auf $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Arten verſetzen läßt, ſo hat man $24 \cdot 24 = 576$ Verſetzungen.

7.

Die Buchſtaben, welche verſetzt werden ſollen, ſind

$$a\ a\ a\ b\ b\ b\ b\ b\ c\ c\ c\ c$$

Da nun jedes Mal c, c, c in der erſten Stelle bleiben und nicht verſetzt werden ſoll, ſo kommt es nur auf die Anzahl der Verſetzungen von

$$a\ a\ a\ b\ b\ b\ b\ b\ c$$

an, und dieſe iſt $= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1} = 504.$

Es giebt alſo 504 Verſetzungen, welche ſich mit c^3 anfangen.

8.

Da es hier auf die Anzahl der Verſetzungen von

$$a\ b\ b\ b\ c\ c\ c$$

ankommt, ſo findet man ſolche

$$= \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3} = 140.$$

Es giebt alſo 140 Verſetzungen, die ſich mit a^2b^2c anfangen.

9.

Nach der Aufgabe ſoll ein a in allen Permutationen ſeine Stelle behalten d. h. einer der Buchſtaben a ſoll nicht verſetzt werden. Es kommt alſo hier nur darauf an, die Anzahl der Permutationen von

$$a \; a \; b \; b \; b \; b \; b \; c \; c \; c \; c$$

zu beſtimmen, und dieſes giebt

$$\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4} = 6930.$$

Es giebt alſo 6930 Verſetzungen, worin a die vierte Stelle einnimmt.

10.

Die Anzahl der Verſetzungen der 5 Ziffern iſt $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2} = 60$. Da nun die Summe der Ziffern in jeder Verſetzung $= 1+2+2+3+4 = 12$ iſt, ſo iſt die Summe der Ziffern in allen Verſetzungen $= 12\cdot60 + 720$.

11.

Eine jede der gegebenen 5 Ziffern kommt ſo oft in der erſten Stelle, und alſo auch in der erſten Columne vor, als die Anzahl der Verſetzungen der vier übrigen beträgt; eben ſo oft kommt aber auch eine jede Ziffer in der zweiten, dritten, vierten und fünften

Stelle oder Columne vor. Die Summen der in den fünf Columnen enthaltenen Ziffern ſind daher gleich groß, man braucht alſo nur mit der Anzahl der Ziffern d. i. mit 5 in die Summe der Ziffern von allen Verſetzungen d. i. in 720 zu dividiren, wodurch man den Quotienten 144 für die Summe jeder Columne erhält.

12.

Die Anzahl der Verſetzungen iſt

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 1260.$$

Multiplicirt man dieſe Zahl mit der Summe der gegebenen Ziffern $= 2+5+5+7+7+8+9 = 43$, ſo erhält man die Summe der Ziffern in allen Verſetzungen. Dividirt man dieſes Product durch die Anzahl der Ziffern = 7, ſo erhält man den Quotienten 7740.

13.

Hier will man finden, wie oft ſich 90 Nummern zu zwei, drei, vier und fünf Ziffern combiniren laſſen. Die allgemeinen Formeln für die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen ſind:

für die Binionen $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$

" " Ternionen $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

" " Quaternionen $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

" " Quinionen $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$

Alſo ſind hier

Amben $\frac{90\,(90-1)}{1\cdot 2} = 4005,$

Ternen $\frac{90\,(90-1)\,(90-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = 117480,$

Quaternen $\frac{90\,(90-1)\,(90-2)\,(90-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 2555190,$

Quinten $\frac{90\,(90-1)\,(90-2)\,(90-3)\,(90-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 43949268.$

14.

Hier iſt n = 60. Folglich ſind es

$\frac{60\,(60-1)}{1\cdot 2} = 1770$ Amben,

$\frac{60\,(60-1)\,(60-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = 34220$ Ternen,

$\frac{60\,(60-1)\,(60-2)\,(60-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 487635$ Quaternen,

$\frac{60\,(60-1)\,(60-2)\,(60-3)\,(60-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 5461512$ Quinten.

15.

Hier will man finden, wie oft ſich 32 Karten zu 15 combiniren laſſen, es iſt alſo n = 32, und folglich iſt die Anzahl der Zuſammenſetzungen

$$\frac{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}\text{*)}$$
$$= 565722720.$$

---

*) Es verſteht ſich von ſelbſt, daß man vor der Multiplication der Ziffern im Zähler und Nenner die in beiden enthaltenen gleichen Faktoren gegen einander heben kann, wodurch die Rechnung um ein Bedeutendes erleichtert wird.

16.

Die Lehrſätze, welche zur Auflöſung der Aufgaben von Nr. 16 bis incl. Nr. 24 erforderlich ſind, befinden ſich im IX. Abſchnitte der Beiſpielſammlung von S. 80 bis S. 94 angeführt und durch viele Beiſpiele erläutert. Die Auflöſungen bieten daher keine Schwierigkeiten mehr dar, und ſind aus dieſem Grunde hier weggeblieben.

25.

In allen 90 Nummern ſind 4005 Amben und in 5 Nummern 10 Amben enthalten, es kommen alſo von 4005 Amben nur 10 Amben heraus. Es iſt daher die Wahrſcheinlichkeit des Gewinnes für den, der eine Ambe beſetzt hat, $= \frac{10}{4005} = \frac{2}{801}$ d. h. unter 801 Fällen ſind 2 Fälle zu ſeinem Vortheile. Da nun in 12 Nummern 66 Amben enthalten ſind, ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit für das Gewinnen einer Ambe $= \frac{66 \cdot 2}{801} = \frac{44}{267}$ d. h. unter 267 Fällen ſind 44 zum Vortheil des Spielers.

Was die Ternen betrifft, ſo ſind in 90 Nummern 117480 Ternen und in 5 Nummern 10 Ternen enthalten, folglich iſt die Wahrſcheinlichkeit für den, der eine Terne beſetzt hat, $= \frac{10}{117480} = \frac{1}{11748}$, und für den, der 12 Nummern, alſo 220 Ternen beſetzt hat, $= \frac{220}{11748} = \frac{5}{267}$.

Auf gleiche Art findet man die Wahrſcheinlichkeit für die Quaternen bei Beſetzung einer Quaterne $= \frac{1}{511038}$, und bei 12 Nummern d. i. bei Beſetzung von 495 Quaternen $= \frac{495}{511038} = \frac{5}{5162}$.

Für die Beſetzung einer Quinte endlich iſt die Wahrſcheinlichkeit $= \frac{1}{43949268}$ und für 12 Nummern oder 792 Quinten $= \frac{792}{43949268} = \frac{2}{110983}$.

26.

Die 90 Nummern laſſen ſich auf 43949268 verſchiedene Arten zu 5 combiniren, er muß daher auch 43949268 Zettel zu 5 Nummern beſetzen.

Was die zweite Frage betrifft, ſo erwäge man, daß die 5 gezogenen Nummern 5 Quaternen enthalten; combinirt man nun jede dieſer Quaternen nach und nach mit einer von den 85 nicht herauskommenden Zahlen, ſo giebt dieſes $5 \cdot 85 = 425$ Zettel mit Quaternen.

Bei der dritten Frage will man wiſſen, wie viel Zettel es ſind, worauf 3 der gezogenen 5 Nummern mit 2 der nicht gezogenen 85 combinirt ſind. Nun ſind in 5 Nummern 10 Ternen und in 85 Nummern 3570 Amben enthalten, alſo iſt die Anzahl der Zettel mit Ternen $= 10 \cdot 3570 = 35700$. Eben ſo erhält man bei der vierten Frage die Anzahl der Zettel mit Amben $= 89770 \cdot 10 = 897700$; und bei der fünften Frage die Anzahl der Zettel mit Auszügen $= 2024785 \cdot 5 = 10123925$.

Endlich iſt die Anzahl der Zettel mit Nieten ſo groß, wie die Anzal der Quinten unter 85 Nummern d. i. 32801517.

27.

13 Nummern laſſen ſich zu 6 auf $\frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 1716$ Arten, und 32 Karten laſſen ſich zu 8 auf $\frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 10518300$ Arten combiniren. Das Verhältniß der Wahrſcheinlichkeit des Gewinnes bei beiden Spielen iſt alſo

$$1716 : 10518300 \text{ oder } 11 : 67425.$$

Wenn nun in beiden Spielen gleich viel riskirt werden ſoll, ſo müſſen ſich die Einſätze ebenfalls, wie $11 : 67425$ verhalten, weil im erſten Spiele 11 und im zweiten 67425 Fälle zu ſeinem Vortheile ſind.

28.

Es iſt einleuchtend, daß, ſo oft man einen Haufen von 7 Kugeln nimmt, ſich im andern 33 befinden müſſen. Da ſich nun 40 zu 7 auf $\frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 18643560$ Arten combiniren laſſen, ſo giebt es auch eben ſo viel Abtheilungen zu 7 und 33 Kugeln.

29.

Unterſucht man zuvörderſt, wie vorher, auf wie viel Arten ſich 21 Kugeln in 2 Haufen zu 10 und 11 Kugeln abtheilen laſſen, ſo erhält man, weil ſich 21 zu 10 auf $\frac{21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10} =$ 352716 Arten combiniren laſſen, eben ſo viel verſchiedene Abtheilungen. Nun laſſen ſich aber noch 10 Kugeln in 2 Haufen zu 3 und 7 ſo oft abtheilen, als ſich 10 zu 3 combiniren läßt, nämlich $\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$mal. Es iſt alſo überhaupt die Anzahl der Abtheilungen zu 3, 7 und 11 Kugeln $= 352716\cdot 120 = 42325920$.

30.

Es laſſen ſich 19 Kugeln in 2 Haufen zu 11 und 8 auf 75582 Arten, ferner 11 Kugeln in 2 Haufen zu 6 und 5 auf 460 Arten, und endlich 6 Kugeln in 2 Haufen zu 2 und 4 auf 15 Arten combiniren. Es iſt daher die Anzahl der ſämmtlichen Abtheilungen $= 75582\cdot 460\cdot 15 = 523783260$.

31.

Verfährt man, wie vorher, ſo erhält man das Product $225792840\cdot 167960 = 37924165406400$.

32.

Hier iſt die Frage: Auf wie viele Arten können 32 Karten in 3 Theile eingetheilt werden, daß der erſte und zweite aus 12 und der dritte aus 8 Blättern beſteht. Verfährt man ebenſo, wie in den vorigen Aufgaben, ſo erhält man das Product

$$225792840 \cdot 125970 = 28443124054800.$$

33.

Auch hier erhält man das Reſultat, wenn man unterſucht, wie oft ſich 52 zu 13, 39 zu 13, 26 zu 13 combiniren läßt, und die hieraus erhaltenen Zahlen mit einander multiplicirt.

34.

Da nur eine von den gezogenen 5 Nummern in den 30 beſetzten enthalten ſein ſoll, ſo müſſen die übrigen 4 unter den andern nicht beſetzten 60 befindlich ſein. Nun iſt die Anzahl der Quaternen in 60 Zahlen $= \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 487635$. Folglich läßt ſich eine jede der 30 Nummern 487635 mal mit 4, aus den 60 nicht beſetzten, combiniren. Es ſind alſo $487635 \cdot 30 = 14629050$ Fälle möglich, wobei unter den 5 gezogenen Nummern eine von den 30 beſetzten und 4 von den 60 unbeſetzten enthalten ſind. Da nun überhaupt die Anzahl der Quinten in 90 Nummern $= 43949268$ iſt, ſo iſt die geſuchte Wahrſcheinlichkeit $= \frac{14629050}{43949268}$*) $= \frac{28025}{84194}$.

---

*) Der größte gemeinſchaftliche Theiler iſt 522.

35.

Man ſchließe hier auf eine gleiche Art. Unter den 5 gezogenen Nummern ſollen 2 in den 30 beſetzten, und folglich 3 in den 60 unbeſetzten enthalten ſein. Nun enthalten 60 Nummern 24220 Ternen und 30 Nummern 435 Amben. Die Anzahl der möglichen Fälle für den Gewinn iſt alſo $34220 \cdot 435 = 14885700$. Die geſuchte Wahrſcheinlichkeit iſt daher, wenn man, wie oben, die Anzahl der Quinten in 30 Nummern zum Nenner macht, $= \frac{14885700}{43949268}$ *) $= \frac{171100}{505164}$.

36.

In 60 Nummern ſind 1770 Amben, und in 30 Nummern 4060 Ternen enthalten. Das Product hiervon iſt $= 7186200$. Folglich iſt die geſuchte Wahrſcheinlichkeit $= \frac{7186200}{43949268}$ **) $= \frac{82600}{505164}$.

37.

In 20 Nummern ſind 142566 Quinten enthalten, folglich iſt die geſuchte Wahrſcheinlichkeit

$= \frac{142566}{43949268}$ ***) $= \frac{273}{84194}$.

---

*) Der größte gemeinſchaftliche Theiler iſt 87.

**) Der größte gemeinſchaftliche Theiler iſt 87.

***) Der größte gemeinſchaftliche Theiler iſt 522.

38.

Da unter den 9 gezogenen Karten nur 5 von Trefle befindlich ſein ſollen, ſo müſſen die andern 4 zu den 24 Karten von den drei übrigen Farben gehören. Nun ſind erſtlich in 24 Karten 10626 verſchiedene Combinationen zu 4 Karten enthalten; und da zweitens im Spiele 8 Karten von Trefle ſind, ſo enthalten dieſe 56 Combinationen zu 5 Karten. Es iſt alſo die Anzahl aller möglichen Fälle für den Gewinn $= 10626 \cdot 56 = 595056$. Die Anzahl der Fälle aber, welche überhaupt ſtattfinden können, iſt 28048800, weil ſich 32 ſo oft zu 9 combiniren läßt. Die geſuchte Wahrſcheinlichkeit iſt daher $= \frac{595056}{28048800} = \frac{12397}{584350}$.

39.

Dieſe Aufgabe iſt der 37ſten ähnlich, nur daß hier 5 beſetzte, und folglich 8 unbeſetzte Nummern ſind. Nun ſind aber in 85 Zahlen 3570 Amben, und in 5 Zahlen 10 Ternen enthalten. Das Product hiervon iſt 35700, folglich iſt die geſuchte Wahrſcheinlichkeit $= \frac{35700}{43949268} = \frac{2975}{3662439}$.

40.

Die Auflöſungen der 40. und 41. Aufgabe laſſen ſich ſehr leicht nach dem Vorhergehenden finden.

42.

Die zuerſt gezogenen 7 Kugeln ſollen roth ſein;

da es nun 10 rothe Kugeln ſind, ſo ſind die möglichen Fälle für den Gewinn = 120, weil ſich 10 zu 7 nämlich 120mal combiniren läßt. Die Anzahl der Fälle, welche überhaupt möglich ſind, wenn aus 24 Kugeln 7 gezogen werden, iſt 346104, mithin iſt die Wahrſcheinlichkeit, 7 rothe Kugeln zu ziehen, $= \frac{120}{346104} = \frac{5}{14421}$. Ferner ſollen zu gleicher Zeit 3 weiße Kugeln aus den übrigen 17 gezogen werden. Da nun 6 weiße Kugeln vorhanden ſind, ſo ſind die möglichen Fälle für den Gewinn = 20. Die Anzahl der Fälle, welche überhaupt möglich ſind, wenn aus 17 Kugeln 3 gezogen werden ſollen, iſt 680. Mithin iſt die Wahrſcheinlichkeit, 3 weiße Kugeln zu ziehen, $= \frac{20}{680} = \frac{1}{34}$. Da nun die Wahrſcheinlichkeit für die 7 rothen Kugeln $= \frac{5}{14421}$ iſt d. h. da unter den 14421 Fällen nur 5 für den Spieler ſind und da man ferner die 14421 Fälle immer mit einem von den 34 Fällen der drei weißen Kugeln combiniren muß, ſo ſind es überhaupt $14421 \cdot 34 = 490314$ Fälle, worunter $5 \cdot 1 = 5$ Fälle für den Spieler ſind d. h. man findet die geſuchte Wahrſcheinlichkeit $= \frac{5}{14421} \cdot \frac{1}{34} = \frac{5}{490314}$.

43.

Ein jeder Würfel hat 6 Flächen. Da nun jede der 6 Flächen des einen Würfels mit jeder der 6

Flächen des andern combinirt werden kann, ſo giebt dieſes $6 \cdot 6 = 36$ verſchiedene Würfe. Kommt nun noch ein dritter Würfel hinzu, ſo müſſen, wegen ſeiner 6 Flächen, die 36 Würfe noch mit 6 multiplicirt werden, und dieſes giebt $6^2 = 216$. Kommt ein vierter hinzu, ſo iſt die Anzahl der Würfe $= 6^4 = 1296$. Folglich laſſen ſich im Allgemeinen mit n Würfeln 6^n verſchiedene Würfe machen.

44.

Mit 4 Würfeln können überhaupt 1296 verſchiedene Würfe gemacht werden, und unter dieſen ſind 6 Würfe (weil nämlich 6 mal 4 gleiche Augen geworfen werden können) für den Gewinn. Die Wahrſcheinlichkeit iſt alſo $\frac{6}{1296} = \frac{1}{216}$.

45.

Mit 2 Würfeln läßt ſich ein Paſch auf 6 verſchiedene Arten werfen. Nun läßt ſich ein jeder Paſch mit fünf Flächen des dritten Würfels combiniren. Denn weil der dritte Würfel nicht gleiche Augen haben darf mit dem Paſch, darf man nur mit 5 und nicht mit den 6 Flächen combiniren. Dieſes giebt alſo $5 \cdot 6 = 30$ verſchiedene Würfe. Ferner laſſen 3 Würfel zu 2 ſich 3mal combiniren. Die möglichen Fälle für einen Paſch ſind daher $= 3 \cdot 30 = 90$. Da nun überhaupt 216 verſchiedene Würfe möglich ſind, ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, einen Paſch zu werfen, $= \frac{90}{216} = \frac{5}{12}$.

46.

Die vier Würfel mögen A, B, C und D heißen. Nach der Aufgabe ſollen 2 einen Paſch enthalten, während die andern beiden weder unter ſich, noch mit dieſem Paſche gleiche Augen haben. Man nehme alſo an, auf A und B befindet ſich ein Paſch, ſo darf dieſer nicht mit den 6 Flächen von C, ſondern nur mit 5 derſelben combinirt werden, weil ſonſt ein Fall eintreten muß, wo C gleiche Augen mit dem Paſche von A und B hat. Die 5 Flächen von C aber laſſen ſich, aus demſelben Grunde, nur mit 4 Flächen von D combiniren. Es können alſo C und D nur auf $4 \cdot 5 = 20$ Arten mit dem Paſche von A und B combinirt werden, und die 6 möglichen Paſche von A und B geben daher $6 \cdot 20 = 120$ verſchiedene Würfe. Da man endlich ſtatt des Paſches von A und B den von B und C, von C und D u. ſ. w. annehmen kann, oder, da in 4 Zahlen 6 Amben enthalten ſind, ſo iſt die Anzahl der Würfe für den Gewinn $= 6 \cdot 120 = 720$. Die Anzahl der Würfe überhaupt aber iſt bei 4 Würfen $= 1296$, folglich iſt die geſuchte Wahrſcheinlichkeit $= \frac{720}{1296} = \frac{5}{9}$.

Bei 5 Würfeln A, B, C, D und E ſchließe man auf eine ähnliche Art. Es befinde ſich auf A und B ein Paſch, ſo darf dieſer nur mit 5 Flächen von C combinirt werden. Die 5 Flächen von C aber dürfen nur mit 4 Flächen von D, und die vier Flächen von D nur mit 3 von E combinirt werden, wenn nicht mehr Paſche, als die 6 von A und B zugleich ſtattfinden ſollen. Es können daher C, D und E nur auf $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Arten mit dem Paſche von A und B combinirt werden, und die 6 möglichen Paſche von A und B geben alſo $6 \cdot 60 = 360$ verſchiedene Würfe. Da man nun ſtatt des Paſches von A und B den Paſch von B und C u. ſ. w. annehmen kann, oder, da in 5 Zahlen 10 Amben enthalten ſind, ſo iſt die Anzahl der Würfe für den Gewinn $= 10 \cdot 360 = 3600$. Die Anzahl der Würfe überhaupt aber iſt bei 5 Würfeln $= 6^5 = 7776$, folglich iſt die geſuchte Wahrſcheinlichkeit für 5 Würfel $= \frac{3600}{7776} = \frac{25}{54}$.

Bei 6 Würfeln A, B, C, D, E und F iſt die Schlußfolge ganz dieſelbe. Der Paſch von A und B kann ſich nur mit 5 Flächen von C, die fünf Flächen von C aber nur mit 4 Flächen von D, die 4 Flächen von D nur mit 3 Flächen von E, und die 3 Flächen von E nur mit 2 von F combiniren d. h. C, D, E und F können nur auf $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ Arten mit dem Paſche von A und B combinirt werden. Die 6 Paſche von A und B geben daher $6 \cdot 120 = 720$ verſchiedene Würfe. Da nun in 6 Zahlen 15 Amben ſind, ſo iſt die Anzahl der Würfe für den Gewinn = $15 \cdot 720 = 10800$. Nun iſt aber die Anzahl der Würfe mit 6 Würfeln überhaupt = $6^6 = 46656$, folglich iſt die Wahrſcheinlichkeit $= \frac{10800}{46656} = \frac{25}{108}$.

Ferner laſſen ſich bei 7 Würfeln A, B, C, D, E, F und G die Paſche von A und B mit 5 Flächen von C, die 5 von C mit 4 von D, die 4 von D mit 3 von E, die 3 von E mit 2 von F, die 2 von F mit 1 von G combiniren. Es können daher C, D, E, F und G auf $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Arten mit den 6 Paſchen von A und B combinirt werden, und dieſes giebt $6 \cdot 120 = 720$ Würfe, welche noch mit 21 multiplicirt werden müſſen, weil in 7 Zahlen 21 Amben ſind, wodurch man die Anzahl der Würfe für den Gewinn = $21 \cdot 720 = 15120$ erhält. Und da die Anzahl der Würfe mit 7 Würfeln = 6^7 = 279936, ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit $= \frac{15120}{279936} = \frac{35}{648}$.

Bei 8 Würfeln ſieht man gleich, daß es unmöglich iſt, mit 2 einen Paſch zu werfen, während die übrigen 6 weder unter ſich, noch mit dieſem Paſche gleiche Augen haben. Die Wahrſcheinlichkeit iſt alſo = 0.

47.

Mit 3 Würfeln läßt ſich eine Terne auf 6 verſchiedene Arten werfen. Man muß daher dieſe 6 Ternen mit 5 Flächen des vierten Würfels combiniren, und dieſes giebt $5 \cdot 6 = 30$. Nun ſind in 4 Zahlen 4 Ternen enthalten, folglich iſt die Anzahl der Würfe für den Gewinn = 6 · 5 · 4 = 120. Die Anzahl der Würfe überhaupt iſt 1296. Es iſt alſo die geſuchte Wahrſcheinlichkeit $= \frac{120}{1296} = \frac{5}{54}$.

48.

Die 6 möglichen Ternen von A, B, C laſſen ſich mit 5 Flächen von D und mit 4 von E combiniren. Dieſes giebt 6 · 5 · 4 = 120. In 5 Zahlen ſind 10 Ternen enthalten, folglich iſt die Anzahl für den Gewinn = 1200. Die Anzahl der Würfe überhaupt iſt $6^5 = 7776$. Die geſuchte Wahrſcheinlichkeit iſt daher $= \frac{1200}{7776} = \frac{25}{162}$.

Bei 6 Würfeln erhält man die Anzahl der Würfe für den Gewinn = 6 · 5 · 4 · 3 · 20 = 7200, und folglich iſt die Wahrſcheinlichkeit $= \frac{7200}{46656} = \frac{25}{162}$.

Bei 7 Würfeln erhält man die Anzahl der Würfe für den Gewinn = 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 35 = 25200. Folglich iſt die Wahrſcheinlichkeit $= \frac{25200}{279936} = \frac{175}{1944}$.

Bei 8 Würfeln erhält man die Anzahl der Würfe für den Gewinn = 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 · 56 = 40320. Folglich iſt die Wahrſcheinlichkeit $= \frac{40320}{1679616} = \frac{35}{1458}$.

Bei 9 Würfeln ſieht man gleich, daß es unmöglich iſt, mit 3 eine Terne zu werfen, während die übrigen 6 weder unter ſich, noch mit dieſer Terne gleiche Augen haben. Die Wahrſcheinlichkeit iſt alſo = 0.

49.

Der eine Paſch von den zwei Sechſen läßt ſich mit 5 Flächen des dritten Würfels combiniren, es ſind alſo $1 \cdot 5 = 5$ Fälle, und da in 3 Zahlen 3 Amben enthalten ſind, ſo ſind $3 \cdot 5 = 15$ Fälle für den Gewinn möglich. Nun kann man mit 3 Würfeln überhaupt $6^3 = 216$ Würfe machen. Die Wahrſcheinlichkeit des erſten Spiels iſt daher $\frac{15}{216} = \frac{5}{72}$. Beim zweiten Spiele ſollen aus 32 Karten 3 von einer Farbe, gleichviel welcher, gezogen werden. Da nun immer 8 gleichfarbige Blätter ſind, ſo braucht man nur 8 zu 3 zu combiniren, und dieſes giebt $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$, und da ferner im ganzen Spiele 4 mal 8 gleichfarbige Blätter enthalten ſind, ſo erhält man $4 \cdot 56 = 224$ Fälle für den Gewinn. Nun laſſen ſich 32 Karten überhaupt zu 3 auf $\frac{32 \cdot 31 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4960$ Arten combiniren. Die Wahrſcheinlichkeit dieſes Spiels iſt alſo $\frac{224}{4960} = \frac{7}{155}$. Folglich iſt das Verhältniß beider Wahrſcheinlichkeiten $\frac{5}{72} : \frac{7}{155} = 775 : 504$.

50.

Aus der 46ſten Auflöſung ergiebt ſich, daß die 8 Würfel, worauf ſich gleiche Augen befinden, mit den 5 Flächen des neunten, mit den 4 Flächen des zehnten, mit den 3 Flächen des eilften, und mit den 2 Flächen des zwölften combinirt werden müſſen. Da nun die 8 Würfel auf 6 verſchiedene Arten gleiche Augen haben können, ſo giebt es für je 8 Würfel $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ Fälle für den Gewinn. Nun laſſen ſich 12 zu 8 auf $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}$ $= 495$ Arten combiniren. Es ſind alſo ſämmtliche Fälle für den Gewinn $= 720 \cdot 495 = 356400$. Die Anzahl der Würfe, welche mit 12 Würfeln überhaupt gemacht werden können, iſt $= 6^{12} = 2176782336$, folglich iſt die Wahrſcheinlichkeit des erſten Spiels $= \frac{356400\text{*)}}{2176782336} = \frac{275}{1679616}$. Beim zweiten Spiele ſollen aus 52 Karten 5 von einer Farbe, gleich viel welcher, gezogen werden. Da es nun $4 \cdot 13$ gleichfarbige Blätter ſind, ſo braucht man nur 13 zu 5 zu combiniren und mit 4 zu multipliciren, und dieſes giebt $\frac{4 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 5148$ Fälle für den Gewinn. Nun laſſen ſich 52 Karten überhaupt zu 5 auf $\frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2598960$ Arten combiniren. Die Wahrſcheinlichkeit dieſes Spiels iſt alſo = $\frac{5148^{*)}}{2598960} = \frac{33}{16660}$. Folglich iſt das Verhältniß beider Wahrſcheinlichkeiten $\frac{275}{1679616} : \frac{33}{16660} = 4581500 : 55427328^{**)} = 104125 : 1259712$.

---

*) Der größte gemeinſchaftliche Theiler iſt 1296.

---

*) Der größte gemeinſchaftliche Theiler iſt 156.

**) Der größte gemeinſchaftliche Theiler iſt 44.

XVI.

Auflöſungen der vermiſchten Aufgaben.

(Zu M. Hirſch, Sammlung von Beiſpielen ꝛc. XXIII. Kapitel, von S. 305 bis 317.)

1.

Die Summe der Augen auf den drei erſten Karten ſei $= x$. Nun beträgt die Anzahl dieſer Augen nebſt der Anzahl der darauf gelegten Karten zuſammen genommen $3 \cdot 15 = 45$. Es iſt demnach die Anzahl der darauf gelegten Karten $= 45 - x$. Da nun zuerſt 3 Karten hingelegt ſind, dann $45 - x$ Karten darauf gelegt worden, und 8 Karten übrig bleiben, ſo iſt

$$3 + 45 - x + 8 = 32,$$

$$\text{folgl. } x = 24.$$

2.

Die Anzahl der Augen auf den erſten n Karten ſei wieder $= x$. Die Anzahl dieſer Augen nebſt der Anzahl der darauf gelegten Karten beträgt ns. Es iſt daher die Anzahl der darauf gelegten Karten $= ns - x$. Da nun noch r Karten übrig bleiben, ſo iſt

$$n + ns - x + r = a,$$

folgl. $x = ns + n + r - a$.

3.

Das Stück Tuch hatte x Ellen. Nun hat er beim Einkauf für 5 Ellen 7 Thlr. und alſo für x Ellen $\frac{7x}{5}$ Thlr. gegeben; beim Verkauf aber für 11 Ellen 16 Thlr., alſo für x Ellen $\frac{16x}{11}$ Thlr. erhalten. Er hat daher bei dieſem Handel $\frac{16x}{11} - \frac{7x}{5}$ Thlr. gewonnen, und es iſt, nach der Aufgabe,

$$\frac{16x}{11} - \frac{7x}{5} = 24,$$

folgl. $x = 440$.

4.

Wenn dem B x Thlr. genommen worden, ſo ſind dem A 2x Thlr. genommen worden. Es iſt daher, nach der Aufgabe,

$$100 - 2x = 3\ (48 - x),$$

folgl. $x = 44$ Thlr. Verluſt des B,

und alſo 88 Thlr. Verluſt des A.

5.

Der Band mag bei beiden Büchern zu x Gr. gerechnet ſein; ſo koſtet das Papier des erſten Buches 14 − x Gr. und das Papier des zweiten Buches 19

— x Gr. Da nun 48 Bogen 14 — x Gr. koſten, ſo koſtet ein Bogen $\frac{14-x}{48}$ Gr. Ferner koſten 78 Bogen des zweiten Buches 19 — x Gr., folgl. koſtet ein Bogen $\frac{19-x}{78}$ Gr. Es iſt demnach, da der Preis des Papiers in beiden Büchern gleich iſt,

$$\frac{14-x}{48}=\frac{19-x}{78},$$

folgl. $x = 6$ Gr.

6.

Man ſieht leicht, daß hier von einer arithmetiſchen Progreſſion die Summe $s = 156$, die Anzahl der Glieder $n = 16$, und das erſte Glied $a = 6$ gegeben iſt. Hiernach findet man das letzte Glied

$$t = \frac{2 \cdot 156}{16} - 6 = 13\tfrac{1}{2} \text{ Thlr.},$$

$$\text{und } d = \frac{13\frac{1}{2}-6}{16-1} = \tfrac{1}{2} \text{ Thlr.}$$

7.

Hier iſt $s = 2363$, $n = 34$ und $d = 3$ gegeben. Es iſt demnach

$$a = \frac{2363}{34} = \frac{(34-1)\,3}{2} = 20 \text{ Thlr.}$$

8.

Durch die zweite Röhre mag der Waſſerbehälter in x Minuten gefüllt werden, folglich füllt dieſe Röhre in einer Minute $\frac{1}{x}$ des Gefäßes. Die erſte Röhre füllt in 20 Minuten das Gefäß, folglich füllt ſie in einer Minute $\frac{1}{20}$ des Gefäßes. Es füllen daher beide Röhren zu gleicher Zeit $\frac{1}{x}+\frac{1}{20}$ des Gefäßes. Da nun, nach der Aufgabe, das Gefäß durch beide Röhren in 12 Minuten gefüllt wird, ſo wird in einer Minute $\frac{1}{12}$ des Gefäßes gefüllt. Es iſt demnach

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{20}=\frac{1}{12},$$

oder $60 + 3x = 5x$,

folgl. $x = 30$ Minuten.

9.

Die Anzahl der Aepfel ſei $= x$ und die der Birnen $= y$. Für vier Aepfel bezahlt er einen Groſchen, folglich für x Aepfel $\frac{x}{4}$ Gr. Für fünf Birnen bezahlt er einen Groſchen, folglich für y Birnen $\frac{y}{5}$ Gr. Es iſt alſo, nach dem erſten Theile der Aufgabe,

$$\text{I. } \frac{x}{4}+\frac{y}{5}=18.$$

Ferner koſtet ihm die Hälfte der Aepfel $\frac{x}{8}$ Gr. und der dritte Theil der Birnen $\frac{y}{15}$ Gr. Es iſt alſo, nach dem zweiten Theile der Aufgabe,

$$\text{II. } \frac{x}{8}+\frac{y}{15}=8.$$

Man ſchaffe in beiden Gleichungen die Brüche weg, multiplicire (I.) mit 2 und ſubtrahire ſie von (II.), ſo erhält man

$$x = 48 \text{ Aepfel},$$

und hieraus $y = 30$ Birnen.

10.

Die Zahl ſei x, ſo iſt

$$x + 15 : x + 27 = x + 27 : x + 45,$$

alſo $(x + 15) \cdot (x + 45) = (x + 27)^2$,

oder $x^2 + 60x + 675 = x^2 + 54x + 729$,

folgl. $x = 9$.

11.

Das erſte Glied der arithmetiſchen Progreſſion ſei x und die Differenz = y, ſo iſt die arithmetiſche Progreſſion

$$x,\ x + y,\ x + 2y,$$

folglich iſt die geometriſche Progreſſion

$$2x,\ 3(x + y),\ 6(x + 2y).$$

Nun iſt in einer geometriſchen Progreſſion von drei Gliedern das Product der beiden äußern Glieder gleich dem Quadrate des mittlern Gliedes. Es iſt demnach

$$12x\,(x + 2y) = [3\,(x + y)]^2$$

oder I. $x^2 + 2xy = 3y^2$.

Ferner iſt die Summe aller Glieder in beiden Progreſſionen = 96. Man erhält alſo

$$14x + 18y = 96,$$

oder II. $7x + 9y = 48$,

folgl. $y = \frac{48 - 7x}{9}$.

Subſtituirt man den Werth von y in (I.), ſo iſt

$$x^2 + 2x\frac{48-7x}{9} = 3\frac{(48-7x)^2}{81} = \frac{2304-672x+49x^2}{27},$$

oder $27x^2 + 288x - 42x^2 = 2304 - 672x + 49x^2$,

oder $64x^2 - 960x = -2304$,

alſo $x^2 - 15x = -36$,

folgl. $x = \frac{15}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{15}{2}\right)^2 - 36\right]}$*) $= 3$.

Subſtituirt man den Werth von x in (II.), ſo findet man

$$y = 3.$$

12.

A habe x Thlr., B y Thlr., C z Thlr., und der Werth des Gemäldes ſei s, ſo iſt

$$\text{I. } x + \frac{y+z}{2} = s,$$

$$\text{II. } y + \frac{x+z}{3} = s,$$

$$\text{III. } z + \frac{y+x}{4} = s.$$

Man erhält aus (I.) und (II.) IV. $4z + z = 3y$,

aus (I.) und (III.) V. $2z - 3x = y$,

aus (IV.) und (V.) $z = \frac{13x}{5} = 2x + \frac{3x}{5}$.

Man ſetze $x = 5n$, ſo iſt $z = 13n$ und $y = 11n$.

Nun ſei $n = 1, 2, 3$ u. ſ. w.,

---

*) Man hat hier die negative Wurzel genommen, weil die poſitive für y einen negativen Werth geben würde.

ſo iſt x 5, 10, 15,
y 11, 22, 33,
z 13, 26, 39.

Hieraus findet man $s = 5 + \frac{11 + 13}{2} = 17$ Thlr.

oder $s = 10 + \frac{22 + 26}{2} = 34$ Thlr u. ſ. w.

13.

A habe x Thlr., B y Thlr., C z Thlr., D v Thlr., E w Thlr., und was ſie zuſammen verzehrt haben, ſei $= s$, ſo iſt

$$\text{I.}\quad x + \frac{y + z + v + w}{4} = s,$$

$$\text{II.}\quad y + \frac{x + z + v + w}{5} = s,$$

$$\text{III.}\quad z + \frac{y + x + v + w}{6} = s,$$

$$\text{IV.}\quad v + \frac{y + x + z + w}{7} = s,$$

$$\text{V.}\quad w + \frac{x + y + z + v}{8} = s.$$

Aus I. u. II. erhält man VI. $16x + z + v + w = 15y$,
aus I. u. III. „ VII. $9z - 10x - v - w = y$,
aus I. u. IV. „ VIII. $7v - 8x - z - w = y$,
aus I. u. V. „ IX. $6w - 7x - z - v = y$,
aus VI. u. VII. „ X. $67z - 83x + 8w = 8v$,
aus VI. u. VIII. „ XI. $17x + 2z + 2w = 13v$,
aus VI. u. IX. „ XII. $89w - 121x - 16z = 16v$,
aus X. u. XI. „ XIII. $57z - 81x = 8w$,
aus X. u. XII. „ XIV. $10z - 3x = 7w$,
aus XIII. u. XIV. „ XV. $543x = 319z$,

$$\text{folgl. } z = \frac{543x}{319} = x + \frac{224x}{319}.$$

Setzt man alſo $x = 319n$,
ſo iſt $z = 543n$,
$w = 639n$,
$v = 599n$,
$y = 459n$.

Iſt nun n 1, 2 u. ſ. w.,
ſo iſt x 319, 638,
y 459, 918,
z 543, 1086,
v 599, 1198,
w 639, 1278.

Hieraus findet man

$$s = 319 + \frac{459 + 543 + 599 + 639}{4} = 879 \text{ Thlr. ꝛc.}$$

14.

Es mögen anfänglich x Perſonen geweſen ſein, es hatte daher jede $\frac{342}{x}$ Thlr. zu bezahlen. Nachdem drei davon gelaufen, bleiben $x - 3$ zurück, und nun muß jede 19 Thlr. mehr d. i. $\frac{342}{x} + 19$ bezahlen, folglich müſſen die zurückbleibenden $x - 3$ Perſonen $(x - 3)\left(\frac{342}{x} + 19\right)$ Thlr. bezahlen. Es iſt demnach

$$(x - 3)\left(\frac{342}{x} + 19\right) = 342,$$

$$\text{oder } x^2 - 3x = 54,$$

$$\text{folglich } x = 9 \text{ Perſonen.}$$

15.

Man habe x Thlr. dafür gegeben, ſo iſt der Verluſt x — 420 Thlr., und der Gewinn, im Falle man 570 Thlr. bekommen hätte, 570 — x Thlr. Es iſt demnach

$$570 - x = 4\,(x - 420),$$

$$\text{folgl. } x = 450 \text{ Thlr.}$$

16.

Das Gras, welches bereits auf einer Q. R. ſtand, ſei = 1, folglich war das Gras auf der ganzen Wieſe = 400. Ferner ſei das Gras, welches in einer Woche auf einer Q. R. wächſt, = x, ſo wächſt in ſieben Wochen auf 400 Q. R. 2800x. Nun haben 8 Pferde in 7 Wochen 400 Q. R. abgeweidet d. h. ſie haben 400 + 2800x Gras gefreſſen; es frißt alſo ein Pferd in einer Woche $\frac{400 + 2800x}{56} = \frac{50 + 350x}{7}$. Ein andermal haben unter gleichen Umſtänden 9 Pferde in 8 Wochen eine Wieſe von 500 Q. R. abgeweidet; es iſt alſo das Futter von einem Pferde in einer Woche $= \frac{500 + 4000x}{72} = \frac{125 + 1000x}{18}$. Mithin iſt

$$\frac{50 + 350x}{7} = \frac{125 + 1000x}{18},$$

$$\text{folgl } x = \frac{1}{28},$$

alſo verzehrt ein Pferd in einer Woche

$$\frac{50 + 350 \cdot \frac{1}{28}}{7} = \frac{125}{14},$$

und daher in 12 Wochen $\frac{750}{7}$.

Nun beträgt das Gras einer Wieſe von 600 Q. R. in 12 Wochen $600 + 7200 \cdot \frac{1}{28} = \frac{6000}{7}$. Da alſo $\frac{750}{7}$ das 12wöchentliche Futter eines Pferdes iſt, ſo iſt $\frac{6000}{7}$ das Futter von 8 Pferden in derſelben Zeit.

17.

Die Tochter bekomme x Thlr., folglich bekommt die Mutter 2x Thlr. und der Sohn 6x Thlr. Es iſt demnach

$$x + 2x + 6x = 9000,$$

folgl. $x = 1000$ Thlr.

18.

In x Tagen nach der Abreiſe des erſten mag der zweite ihn eingeholt haben. Da nun der erſte Reiſende den erſten Tag eine Meile und jeden folgenden Tag immer eine Meile mehr gemacht hat, ſo hat er den letzten Tag x Meilen gemacht, und folglich ſind die ſämmtlichen Meilen, die er zurückgelegt hat, gleich der Summe einer arithmetiſchen Progreſſion, deren erſtes Glied 1, das letzte Glied und die Anzahl der Glieder x iſt d. h. $= \frac{1}{2}x\,(1 + x)$. Der zweite hat den erſten in $x - 5$ Tagen eingeholt, und hat täglich 12 Meilen gemacht. Es iſt demnach

$$\tfrac{1}{2}x\,(1 + x) = 12\,(x - 5),$$
folgl. $x = 8$ Tage.

19.

In x Tagen nach der Abreiſe des erſten habe der zweite ihn eingeholt. Der erſte Reiſende macht den erſten Tag a Meilen, und jeden folgenden Tag d Meilen mehr. Er hat daher am letzten Tage dx Meilen gemacht. Der ſämmtlichen Meilen, die er zurückgelegt hat, ſind demnach gleich der Summe einer arithmetiſchen Progreſſion, deren erſtes Glied $= a$, das letzte Glied $= dx$, und die Anzahl der Glieder $= x$. Dieſe Summe iſt daher

$$= \tfrac{1}{2}x\,(a + dx).$$

Der zweite hat den erſten in $x - n$ Tagen eingeholt und hat täglich b Meilen gemacht. Es iſt demnach

$$\tfrac{1}{2}x\,(a + dx) = b\,(x - n),$$
oder $\tfrac{1}{2}dx^2 + \tfrac{1}{2}ax - bx = -bn,$
$$x^2 + \left(\frac{a - 2b}{d}\right)x = -\frac{2bn}{d},$$
folgl. $x = \dfrac{-(a - 2b) \pm \sqrt{[(a - 2b)^2 - 8bdn]}}{2d}.$

20.

Man erhält die Gleichungen

$$x + y = xy,$$
und $x + y + x^2 + y^2 = 15\tfrac{3}{4},$

welche bereits oben S. 109 §. 12 aufgelöſt worden ſind; man braucht daher nur die hier gegebene bekannte Größe $15\frac{3}{4}$ in den dortigen Formeln ſtatt a gehörig zu ſubſtituiren.

21.

Hier iſt eigentlich die Frage, welche Zahlen laſſen, durch 4, 6 oder 9 dividirt, den Reſt 3, durch 7 oder 13, den Reſt 1, und durch 11, den Reſt 7 übrig? Die geſuchten Zahlen müſſen alſo die Form $36x + 3$, $91y + 1$ und $11z + 7$ haben. Wie man aber hieraus die Zahlen ſelbſt findet, iſt bereits oben bei den Auflöſungen von den unbeſtimmten Aufgaben hinlänglich gezeigt werden, und braucht daher hier nicht wiederholt zu werden.

22.

Der erſte habe x Patronen, und alſo der zweite $1000 - x$ gefüllt. Der erſte gebraucht zu $1000 - x$ Patronen 18 Ctr. Pulver, folglich hat er zu ſeinen x Patronen $\frac{18x}{1000 - x}$ Ctr. Pulver verbraucht; der zweite braucht zu x Patronen 8 Ctr. Pulver, folglich hat er zu ſeinen $1000 - x$ Patronen $\frac{8000 - 8x}{x}$ Ctr. verbraucht. Es iſt demnach

$$\frac{18x}{1000 - x} = \frac{8000 - 8x}{x},$$

folgl. $x = 400$ Patronen ꝛc.

23.

Man behandle die Auflöſung dieſer Aufgabe, wie es oben bei der Zinsrechnung an mehreren Beiſpielen gezeigt worden iſt.

24.

Er habe die Miſchung xmal wiederholt. Nach der erſten Miſchung waren im Faſſe überhaupt 99 Quart reiner Wein, und folglich in jedem Quart beſonders $\frac{99}{100}$ Quart geblieben. Die Güte des Weines nach dieſer erſten Miſchung iſt alſo um $\frac{99}{100}$ pro Quart ſchlechter geworden. Nimmt man abermals 1 Quart von den 100 Quart gemiſchten Weines, ſo verſchlechtert er ſich ebenfalls, wie vorher, um $\frac{99}{100}$ pro Quart. Da nun dieſe Miſchung auf eine gleiche Art xmal geſchieht, ſo verſchlechtert ſich der Wein nach der letzten Miſchung um $\left(\frac{99}{100}\right)^x$ pro Quart. Nach der Aufgabe koſtet das Quart nach der letzten Miſchung ſtatt $1\frac{1}{2}$ nur noch 1 Thlr.; es iſt daher in jedem Quart nur $\frac{2}{3}$ Quart reiner Wein geblieben. Es iſt demnach

$$\left(\frac{99}{100}\right)^x = \frac{2}{3}.$$

Mit Hülfe der Logarithmen findet man hieraus

$$x = 40 \text{ bis } 41 \text{mal}.$$

25.

Die Auflöſung dieſer unbeſtimmten Aufgabe bleibt hier weg, weil im X. Kapitel mehrere Aufgaben von dieſer Gattung bereits aufgelöſt worden ſind.

26.

Die eine Zahl ſei x, und alſo iſt die andere $x + 75$. Das Product dieſer beiden Zahlen iſt $x^2 + 75x$. Der Schüler dividirt dieſes Product durch x, und erhält zum Quotienten $227 + \frac{113}{x}$. Nun hat er, nach der Aufgabe, das Product um 1000 zu klein genommen, folglich muß auch der Quotient um $\frac{1000}{x}$ zu klein ſein. Es iſt demnach

$$\frac{x^2 + 75x}{x} = 227 + \frac{113}{x} + \frac{1000}{x},$$

oder $x^2 - 152x = 1113$,

folgl. $x = 159$.

und alſo die andere Zahl $= 234$.

27.

Die nun folgenden Aufgaben bis zu Ende dieſes Abſchnittes ſind entweder von dem Herrn Verfaſſer der Beiſpielſammlung ſelbſt aufgelöſt, oder ſie ſind bereits in den vorhergehenden Abſchnitten enthalten. In beiden Fällen wäre es überflüſſig, ſie hier zu wiederholen.

Berlin, Druck der Gebr. Unger'ſchen Hofbuchdruckerei.

Inhalt.

Von den Gleichungen.

Seite

I. Auflöſungen der Gleichungen vom erſten Grade mit einer unbekannten Größe 1

II. Auflöſungen der Gleichungen vom erſten Grade mit mehreren unbekannten Größen 25

III. Auflöſungen der Gleichungen vom zweiten Grade mit einer unbekannten Größe. 57

IV. Auflöſungen der Gleichungen vom zweiten Grade mit mehreren unbekannten Größen 96

V. Auflöſungen der Gleichungen von höheren Graden.
  A. Durch die Cardaniſche Formel 123
  B. Durch Aufſuchung ihrer rationalen Wurzeln. . 129
  C. Durch Näherung 145

Von den Aufgaben.

VI. Auflöſungen der Aufgaben für die Gleichungen des erſten Grades mit einer unbekannten Größe . . 155

VII. Auflöſungen der Aufgaben für die Gleichungen des erſten Grades mit mehreren unbekannten Größen. 224

VIII. Auflöſungen der Aufgaben für die Gleichungen des zweiten Grades mit einer und mit mehreren unbekannten Größen. 280

Seite
IX. Auflöſungen der Aufgaben für die Gleichungen von höheren Graden 333
X. Auflöſungen der unbeſtimmten Aufgaben 346
XI. Auflöſungen der Aufgaben, die Progreſſionen und die figurirten Zahlen betreffend 371
XII. Auflöſungen der Aufgaben aus der Zins- und Rentenrechnung, nebſt den Auflöſungen einiger anderer dahin gehöriger Aufgaben 384
XIII. Auflöſungen der Aufgaben für die Permutationen, Combinationen und Variationen, desgleichen für die Wahrſcheinlichkeits-Rechnung 403
XIV. Auflöſungen der vermiſchten Aufgaben 425

Berichtigungen.

S. 6 Z. 12 hinter $-$ 519,67567 ſetze …
= 9 = 10 ſt. $-\frac{x}{ab}d$ l. $-\frac{x}{ab}$
= 11 = 1 v. u. im Nenner ſt. $3a+c$ l. $3a+x$
= 13 = 11 ſt. x l. x^n
= 14 = 5 im Nenner ſt. kbdfd l. kbdfh
= 15 = 10 v. u. ſt. $(a^2-b)^2x$ l. $(a^2-b^2)x$
= 22 = 5 v. u. ſt. $\frac{2}{3x}$ l. $\frac{3x}{2}$
= 256 = 2 v. u. ſt. 10= l. 15=
= — = 1 v. u. ſt. y l. x und ſt. $10y$ l. $15x$.

Staatl. Bibliothek Passau

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Sachs, Salomo,

Auflösungen der in Meier Hirsch, Sammlung von Beispielen etc., enhaltenen Gleichungen und Aufgaben zum Selbstunterricht bestimmt

Berlin 1859

Passau, Staatliche Bibliothek -- S nv/OS 85(9)

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11346079-7